Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

ӘОЖ 530.122.2:524.882(043) Қолжазба құқығында

ЕРГАЛИЕВА ГУЛЬМИРА ТЕМИРЕШЕВНА

Гравитация және қара құрдым теорияларының жалпыланған модельдері

6D060400 – Физика

Философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Ғылыми кеңесші
доктор PhD,
қауымдастырылған профессор
Мырзакулов Е.М.

Шетелдік ғылыми кеңесші
доктор PhD,
профессор
Синглетон Д.
(Калифорния мемлекеттік
Университеті)

Қазақстан Республикасы
Астана, 2025

МАЗМҰНЫ

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР 3
КІРІСПЕ 4
1 ТЕРБЕЛМЕЛІ ҒАЛАМ, ФАНТОМ ҚИЫЛЫСЫ ЖӘНЕ ХАББЛ ПАРАМЕТРІНІҢ ШИЕЛЕНІСІ 13
1.1 Квазистационарлық күй космологиясының фондық деңгейінің құрылымы 14
1.2 Квазистационарлық күй космологиясындағы бақылау шектеулері 18
2 БЕСӨЛШЕМДІ РЕЙСНЕР-НОРДСТРЕМ ҚАРА ҚҰРДЫМЫНЫҢ КӨЛЕҢКЕСІ 25
2.1 Бесөлшемді Рейснер-Нордстремнің қара құрдымы 27
2.2 Қара құрдым көкжиегі 28
2.3 Плазмасыз ортадағы бөлшектер қозғалысы 29
2.4 Қара құрдым көлеңкесін салу 33
2.5 Параметрлердің плазмасыз ортадағы көлеңке радиусына әсері 37
2.6 Плазмалық ортаның қатысуымен түсірілетін көлеңке 37
2.7 Плазмалық орта үшін геодезия және қара құрдым көлеңкесі 39
2.8 Параметрлердің плазмалық ортадағы көлеңке радиусына әсері 44
2.9 Бақылау бойынша көлеңке радиусы 46
2.10 Энергия шығарындыларының деңгейі 53
3 ЭЙНШТЕЙН-ГАУСС-БОННЕ ГРАВИТАЦИЯСЫНДАҒЫ БАРДИННІҢ ҚАРА ҚҰРДЫМЫ 56
3.1 Эйнштейн-Гаусс-Бонне гравитациясындағы қара құрдым шешімдері 57
3.2 Басқа ұқсас шешімдермен қысқаша салыстыру 63
3.3 Бардиннің қара құрдымының термодинамикасы 63
3.4 Термодинамикалық жүйенің жергілікті және жаһандық тұрақтылығы 65
3.5 Фазалық ауысулар 68
3.6 AdS/CFT сәйкестігі шеңберіндегі фазалық құрылым 72
3.7 Қара құрдым сұйық сипаттамасының маңызды көрсеткіштері 75
4 БАРДИН-ЯНГ-МИЛЛС ҚАРА ҚҰРДЫМЫНЫҢ ТЕРМОДИНАМИКАЛЫҚ ҚҰРЫЛЫМЫ 78
4.1 Әсер және қозғалыс теңдеулері 79
4.2 Бардин-Янг-Миллс қара құрдымының шешімі 82
ҚОРЫТЫНДЫ 85
ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ 87

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР

$a(t)$	– масштабты фактор
R	– кеңістіктің қисықтық скаляры
T	– ширату тензорының скаляры
Λ	– космологиялық тұрақты
H	– Хаббл параметрі
ЖСТ	– жалпы салыстырмалылық теориясы
МГТ	– модификацияланған гравитация теориясы
ФРУ	– Фридман-Робертсон-Уокер
КМ	– күңгірт материя
КЭ	– күңгірт энергия
QSSC	– квазистационарлық күй космологиясы
ҚҚ	– қара құрдым
SN Ia	– асқын жаңа Ia типті жұлдыз
МСМС	– Монте-Карлоның Марков тізбегі
WMAP	– Уилкинсон микротолқынды анизотропиялық зонды
Plank	– Планк ғарыштық обсерваториясы
BAO	– барионды акустикалық осцилятор
ҒМФ	– ғарыштық микротолқынды фон
ЭГБ	– Эйнштейн-Гаусс-Бонне гравитациясы
ΛCDM	– Лямбда суық күңгірт материя моделі
$SgrA^*$	– супермассивті қара құрдым
$M_\oplus$	– Күн массасы
ГБ	– Гаусс-Бонне
RN	– Рейснер-Нордстрем
RN-AdS_5 BH	– 5 өлшемді анти-де-Ситтер Рейснер-Нордстрем қара құрдымы
AdS	– анти-де-Ситтер
EHT	– Event Horizon Telescope

КІРІСПЕ

Жұмыстың жалпы сипаттамасы

Қазіргі космология мен гравитация физикасында соңғы онжылдықтарда алынған теориялық және бақылаулық нәтижелер Ғаламның құрылымы мен оның ірі масштабтағы эволюциясын түсіндіруде жаңа тәсілдердің қажеттілігін айқындап отыр. Әсіресе Ғаламның үдемелі ұлғаюы, Хаббл параметрі шиеленісі және қара құрдымдардың (ҚҚ) табиғаты сияқты іргелі мәселелер заманауи теориялық физикада орталық орын алады. Осыған байланысты жалпы салыстырмалылық теориясын (ЖСТ) кеңейтетін немесе нақтылайтын гравитацияның модификацияланған модельдерін зерттеу, сондай-ақ ҚҚ-дардың геометриялық, динамикалық және термодинамикалық қасиеттерін талдау ғылыми тұрғыдан ерекше маңызға ие.

Диссертациялық жұмыста Ғаламның эволюциялық модельдері мен ҚҚ-дардың физикалық сипаттамалары ЖСТ және оның жалпыланған теориялары шеңберінде кешенді түрде қарастырылады. Алдымен Фридманның жазық, біртекті және изотропты Ғалам моделі негізінде квазистационарлық күй космологиясы (QSSC) талданып, масштабтық фактордың тербелмелі шешімі алынды. Мұндай шешім Ғаламның кейінгі уақыттағы динамикасын дәл сипаттап қана қоймай, соңғы жылдары космологиядағы ең маңызды мәселелердің бірі саналатын Хаббл тұрақтысының жоғары және төмен қызыл ығысудағы мәндері арасындағы айырмашылықты феноменологиялық түрде азайтуға қабілетті екенін көрсетеді.

Сонымен қатар зарядталған анти-де-Ситтер кеңістігіндегі Рейснер-Нордстрем қара құрдымының (RN-AdS_5 BH) көлеңкесі зерттелді. Алынған нәтижелер аса массивті *M87** және *Sgr A** ҚҚ-дарының бақылау деректерімен салыстырылды. Зарядтың, космологиялық тұрақтының және плазма параметрлерінің көлеңке радиусы мен энергия шығару қарқындылығына әсері анықталып, плазмалы және плазмасыз ортадағы фотондардың геодезиялық қозғалысы жеке-жеке талданды.

Эйнштейн-Гаусс-Бонне (ЭГБ) гравитациясы аясында Бардиннің сингулярлық емес ҚҚ-ы бейсызықтық электродинамикамен біріктіре отырып зерттелді. Алынған бесөлшемді шешім оқиға және Коши көкжиектері бар тұрақты ҚҚ-ды сипаттайды. Оның термодинамикалық қасиеттері – температура, энтропия, жылу сыйымдылығы есептеліп, фазалық ауысулар мен Гиббс энергиясы арқылы ҚҚ-дың жергілікті және жаһандық тұрақтылығы анықталды. Сонымен бірге Янг-Миллс өрісімен толықтырылған Бардин-Янг-Миллс моделінде масса, температура және жылу сыйымдылығы сияқты негізгі шамалар талданып, фазалық ауысулардың максималды температурада жүретіні көрсетілді.

Тақырыптың өзектілігі

1915 жылы Альберт Эйнштейн Риман геометриясына негізделген ЖСТ ұсынды, бұл гравитацияны сипаттайтын фундаменталды теорияға айналды. ЖСТ астрофизикада, космологияда, серіктердің орбиталық қозғалысын

зерттеуде және заманауи технологияларда кеңінен қолданылады. Теорияның дұрыстығы Меркурий перигелийінің ығысуы, Күн тұтылуы кезіндегі жарықтың ауытқуы, уақыттың гравитациялық баяулауы, гравитациялық қызыл ығысу, гравитациялық өрістегі сигналдың кешігуі және гравитациялық толқындардың тіркелуі сияқты көптеген тәуелсіз бақылаулар арқылы расталды.

ЖСТ-ның үлкен жетістіктеріне қарамастан, қазіргі космологияда шешімі толық анықталмаған бірқатар іргелі мәселелер бар. Солардың ең маңыздыларының бірі – Ғаламның үдемелі ұлғаюының физикалық табиғатын түсіндіру [1, 2]. Бұл құбылыс күңгірт материя (КМ) және күңгірт энергия (КЭ) тұжырымдамаларымен байланыстырылады. КМ электромагниттік өзара әрекеттеспейтіндіктен тікелей бақыланбайды; оның бар екендігі галактикалардың айналу қисықтары мен гравитациялық линзалау әсерлерінен анықталады. Ал КЭ – теріс қысымға ие гипотетикалық энергия, ол Ғаламның қазіргі үдемелі кеңеюін қамтамасыз етеді. Алайда КМ мен КЭ табиғаты әлі толық зерттелмеген.

Бұл мәселелерді түсіндіру мақсатында ЖСТ-ның модификацияланған нұсқалары мен балама космологиялық модельдер қарастырылуда. Солардың ішінде ΛCDM моделі (Λ – космологиялық тұрақты, CDM – суық КМ) қазіргі стандартты космологиялық модель болып табылады [3]. ΛCDM көптеген бақылаулармен жақсы үйлескенімен, күңгірт энергияның динамикалық скалярлық өрістер арқылы сипатталуы да белсенді зерттелуде [4, 5].

Алайда ΛCDM моделінің маңызды шектеулерінің бірі – Хаббл тұрақтысының әртүрлі қызыл ығысу диапазондарында алынған мәндерінің сәйкес келмеуі. Планк обсерваториясының соңғы нәтижелері $H_0 = 67.36 \pm 0.54$ км/с/Мпк мәнін көрсетсе, төмен қызыл ығысудағы бірнеше тәуелсіз бақылаулар айтарлықтай жоғары шамаларды береді. Ia типті аса жаңа жұлдыздарды зерттеу нәтижелері $H_0 = 73.30 \pm 0.33$ км/с/Мпк [6], Megamaser Cosmology Project жобасының деректері $H_0 = 73.90 \pm 0.39$ км/с/Мпк, ал гравитациялық линзаларды ұзақ мерзімді бақылауға негізделген H0LiCOW (COSMOGRAIL) жобасы $H_0 = 73.3^{+1.7}_{-1.8}$ км/с/Мпк мәнін береді.

Бұл нәтижелер арасындағы айырмашылықтың статистикалық маңыздылығы 4.2σ (стандартты ауытқу деңгейі) шамасына жетеді, яғни мұндай алшақтықтың кездейсоқ флуктуация болуының ықтималдығы өте төмен. Сондықтан бұл сәйкессіздік қазіргі космологияда «Хаббл шиеленісі» деп аталатын маңызды ғылыми проблемаға айналды.

Соңғы жылдары осы шиеленісті түсіндіру үшін бірқатар тәсілдер ұсынылуда. Солардың ішінде Ғалам масштабтық факторының тербелмелі сипатына негізделген QSSC моделі [7, 8] ерекше назар аударады. QSSC-тың басты артықшылығы – оның бастапқы сингулярлық емес құрылуы және Ғаламның кейінгі уақыттағы үдемелі кеңеюін табиғи түрде түсіндіре алуы. Сондықтан Хаббл шиеленісін азайту немесе түсіндіру тұрғысынан QSSC моделін талдау теориялық тұрғыдан да, феноменологиялық тұрғыдан да өзекті болып табылады.

Космологиялық аспектілерден бөлек, ЖСТ экстремалды шешімдерін – ҚҚ-дарды зерттеу де маңызды бағыт болып табылады. ҚҚ-дарды зерттеудің өзектілігі олардың ЖСТ шеңберіндегі ең экстремалды және күрделі нысандардың бірі болуымен тығыз байланысты. ҚҚ гравитациялық өрісінің қарқындылығы кеңістік-уақыт қисықтығын Планк масштабына дейін арттырып, классикалық теориялардың қолданылу шегін айқын көрсетеді.

ҚҚ – оқиға көкжиегінен тыс аймақта ешбір материя, электромагниттік сәулелену немесе ақпарат шыға алмайтын кеңістік-уақыттың ерекше облысы. Математикалық тұрғыдан ҚҚ ЖСТ теңдеулерінің шешімі болып табылады және оның геометриясы массаның және энергияның таралуымен анықталады [10].

Қазіргі уақытта галактикалардың көпшілігінің ортасында ҚҚ-дар бар деген болжам бар; мысалы, Құс жолы галактикасының орталығында супермассивті ҚҚ Мерген А* (*Sgr A**) орналасқан [12, 13], және жақында бұл аса массивті ҚҚ-ның көлеңкесін Event Horizon Telescope (EHT) жобасы алғаш рет тікелей бақылады [14].

ҚҚ-ға жақын қозғалатын кез келген нысандар күшті тартылыс өрісіне ұшырайды және белгілі бір шекті радиустан кейін міндетті түрде ҚҚ-ға құлайды. Бұл құбылыс күшті гравитациялық линзалау арқылы түсіндіріледі. Егер жарықтандырылған фотон көзі ҚҚ-ның дәл артында орналасса, фотон бөлшектері ҚҚ маңында бұрылып, алыстағы бақылаушы қабылдайтын жазықтықта көлеңке *(shadow)* құра алады. ҚҚ көлеңкесін алғаш рет Бардин зерттеген [15]. Сфералық симметриялы статикалық ҚҚ (Шварцшильд типі) дөңгелек пішінді көлеңке түсірсе, айналмалы ҚҚ-ларда көлеңке пішіні айналу параметріне тәуелді түрде деформацияланады.

Қазіргі кезде ҚҚ көлеңкесін зерттеу қарқынды дамып келе жатқан зерттеу саласына айналды. Төрт өлшемді стандартты ЖСТ аясындағы зерттеулерден бөлек, қосымша өлшемдері бар кеңістік-уақыттардағы ҚҚ шешімдерін талдау да маңызды теориялық нәтижелерге әкелуде.

Осыған байланысты бесөлшемді ҚҚ шешімдері ішектер теориясы, бранадағы Ғалам космологиясы және калибрлеу-гравитациялық дуализм идеялары шеңберінде кеңінен зерттелуде. Мұндай зерттеулер RN-AdS$_5$ ВН моделіндегі көлеңкені талдауға да теориялық негіз береді. RN-AdS$_5$ ВН – Эйнштейн теңдеуінің статикалық, сфералық симметриялы вакуумдық шешімі. Диссертацияның екінші тарауында зарядталған RN-AdS$_5$ ВН плазмалық және плазмасыз ортадағы көлеңкесі егжей-тегжейлі зерттелді [16].

Ловлок гравитациясы [17] гравитация теориясының модификацияланған түрі бола отырып, өріс теңдеулерін жоғары өлшемдерде жалпылайды. Ловлок гравитациясының маңыздылығы – бұл *D*-өлшемдерінде екінші ретті қозғалыс теңдеулерін беретін ЖСТ теориясы. Гаусс-Бонне (ГБ) немесе ЭГБ гравитациясы – Ловлоктың жоғары өлшемдегі гравитациясының ерекше түрі, ол табиғи түрде ішектер теориясының төмен энергиялық тиімді әсерінде көрінеді [18].

Жақында *4D* массивтік AdS-ГБ гравитациясының ҚҚ шешімі алынды [15, p. 044-1-044-29]. Сонымен қатар Янг-Миллс өрісі бар *4D* AdS-ГБ ҚҚ үшін де

тұйық шешім табылған. Осы бөлімде бейсызықтық бастапқы мүшесі бар массивті бесөлшемді ГБ гравитациясы үшін ҚҚ шешімін алуға назар аударылады [19].

Ертерек Сахаров және Глинер гравитациялық күйреуді дұрыс сипаттау үшін күй теңдеулері $p=-\rho$ немесе $p=-\rho/3$ түріндегі де-Ситтер ядролары сингулярлық емес шешімдерге алып келуі мүмкін екенін болжаған. Осы идеяға сүйене отырып, Бардин алғашқы тұрақты ҚҚ моделін ұсынды, ал Айон-Беато мен Грасия бейсызықтық электродинамикамен байланысты нақты сингулярлық емес шешімдерді алды.

ЭГБ гравитациясында, *4D* ГБ гравитацияда және массивтік гравитацияда сингулярлық емес ҚҚ шешімдерінің әртүрлі жалпылаулары жасалған. Ньюман-Дженис алгоритмін қолдану арқылы олардың айналмалы аналогтары да алынған.

Жоғарыда аталған теориялық зерттеулермен тығыз байланысты болып, ҚҚ-ның термодинамикалық қасиеттері көптеген жылдар бойы қызығушылық тудыруда [20, 21]. ҚҚ тек температурамен немесе энтропиямен ғана сипатталмайды, олар фазалық құрылымға ие және шекті құбылыстарға мүмкіндік береді. Хокинг пен Пейдж AdS мен термиялық анти Ситтер арасындағы алғашқы фазалық ауысуды зерттеді.

Кеңістік-уақыттың қисықтығы Планк мәніне жақындағанда және одан асқанда, классикалық кеңістік-уақыт моделі жарамсыз болуы мүмкін. Бұл астрофизикалық ҚҚ-дарды ЖСТ-ның белгілі шешімдері қаншалықты дәл сипаттайды немесе ҚҚ еліктеушілері *(mimickers)* мен сингулярлық емес ҚҚ модельдері анағұрлым қолайлы ма деген сұрақты туындатады [22].

Кванттық әсерлердің ҚҚ метрикасына ықпалы олардың термодинамикалық қасиеттерін зерттеуді одан әрі өзекті етеді [23]. Метриканың өзгеруі оқиға көкжиегінің геометриясына әсер етіп, ҚҚ-дың термодинамикалық қасиеттерінің өзгеруіне алып келеді.

Жұмыстың мақсаты:

Заманауи космология мен гравитацияның өзекті мәселелерін – Хаббл тұрақтысының шиеленісін QSSC космологиялық моделі арқылы**,** сондай-ақ RN-AdS_5 және ЭГБ гравитациясындағы Бардин типті тұрақты ҚҚ негізінде ҚҚ-дардың термодинамикалық және геометриялық қасиеттерін кешенді түрде зерттеу.

Қойылған мақсатқа жету үшін жұмысты орындау барысында келесі **міндеттер** шешілді:

1. QSSC моделі негізінде Ғалам эволюциясының тербелмелі сипаттамасын талдау және оның жоғары қызыл ығысудағы (CMB/Planck) деректер мен төмен қызыл ығысудағы бақылаулар (OHD, SN Ia, BAO) арасындағы Хаббл параметрі шиеленісін феноменологиялық тұрғыда азайту мүмкіндігін бағалау.

2. RN-AdS_5 ВН көлеңкесін плазмалы және плазмасыз ортада есептеу, зарядтың, космологиялық тұрақтының және плазма параметрінің көлеңке радиусына әсерін анықтау және алынған нәтижелерді *M87** және *Sgr A**

нысандарының бақылау деректерімен сапалық тұрғыда салыстыру және сәйкестігін бағалау.

3. ЭГБ гравитациясындағы Бардин ҚҚ тұрақты шешімінің термодинамикалық қасиеттерін (температура, энтропия, жылу сыйымдылығы, Гиббс энергиясы) және $P-V$ критикалық құбылыстарын зерттеу.

4. Бардин-Янг-Миллс ҚҚ-ының тұрақты шешімін алып, оның көкжиек құрылымын, термодинамикалық қасиеттерін (жылу сыйымдылығы, фазалық ауысулар) және Бекенштейн-Хокинг ауданы заңынан ауытқуын талдау.

5. QSSC космологиялық моделінің болжамдарын заманауи бақылау деректерімен – $H(z)$, Sn Ia (Pantheon) және BAO – салыстыру және модель параметрлерін Монте-Карло Марков тізбегі (MCMC) әдісі арқылы статистикалық бағалау.

Зерттеу нысандары:

1. QSSC моделі және Хаббл параметрінің тербелмелі табиғаты.

2. RN-AdS_5 BH көлеңкесі және нөлдік бөлшектердің геодезиялық қозғалысы.

3. ЭГБ гравитациясындағы Бардин ҚҚ-ының термодинамикалық және фазалық қасиеттері.

4. Бардин-Янг-Миллс ҚҚ-ының қозғалыс теңдеулері мен термодинамикалық құрылымы.

5. QSSC моделін тексеруге пайдаланылатын бақылау деректері: Sn Ia (Pantheon), $H(z)$ (OHD) және BAO.

Зерттеу әдістері:

1. Аналитикалық әдістер: ФРУ метрикасы негізіндегі космологиялық теңдеулерді, Эйнштейн теңдеулерін, қозғалыс теңдеулерін және нөлдік геодезиялық траекторияларды шешуді қамтитын аналитикалық әдістер.

2. Сандық әдістер: Монте-Карло Марков тізбегі (MCMC) алгоритмі негізінде космологиялық модель параметрлерін бағалау және бақылау деректерінің статистикалық талдауы.

3. Геометриялық-оптикалық әдістер: ҚҚ көлеңкесінің контурын модельдеу және RN-AdS_5 BH сияқты нысандардың көлеңкесін *M87** және *Sgr A** бақылау деректерімен салыстырмалы талдау.

4. Термодинамикалық талдау әдістері: ҚҚ-дардың температурасы, энтропиясы, жылу сыйымдылығы, Гиббс энергиясын есептеу, фазалық ауысуларды және $P-V$ критикалық құбылыстарын зерттеу.

5. Математикалық модельдеу: QSSC моделінің масштабтық факторының тербелмелі формасын және Хаббл параметрінің уақытқа тәуелді эволюциясын модельдеу және талдау.

Қорғауға шығарылған негізгі қағидаттар:

1. QSSC моделінде масштабты фактордың тербелмелі шешімі.

QSSC моделінде масштабты фактордың тербелмелі сипаты Хаббл параметрінің $H(t)$ қазіргі дәуірге жақын артуына алып келетіні, тиімді күңгірт

энергияның фантомдық тәрізді күйін $\omega_{DE}(0) < -1$ табиғи түрде туындататыны және төмен қызыл ығысудағы H_0 мәндерімен 1σ деңгейінде үйлесетіндігі көрсетілді. OHD, Pantheon (SN Ia) және BAO бақылау деректері бойынша жүргізілген MCMC талдауы QSSC моделіндегі тербелмелі механизмнің Хаббл параметрінің шиеленісін феноменологиялық тұрғыдан әлсіреететінін және жоғары қызыл ығысуларда ΛCDM космологиясына асимптотикалық түрде сәйкес келетінін растайды.

2. RN-AdS$_5$ BH көлеңкесі.

Зарядталған RN-AdS$_5$ BH үшін фотондық сфераның радиусы және көлеңкенің радиусы алғаш рет аналитикалық түрде алынды. Вакуумда көлеңке радиусы заряд q және космологиялық тұрақты Λ артқан сайын кемиді, ал плазмалы ортада заряд q плазма параметрі k артқан сайын ұлғаятыны дәлелденді. Алынған нәтижелер *M87** және *Sgr A** супермассивті ҚҚ-дарының көлеңкелері туралы бақылаулармен сапалық деңгейде үйлеседі.

3. ЭГБ гравитациясындағы Бардин қара құрдымы.

ЭГБ гравитациясында бейсызықтық электродинамикамен байланыстырылған Бардин типті сингулярлық емес ҚҚ-ның жаңа дәл шешімі алынды. Қисықтық инварианттарының барлық аймақта шекті болуы сингулярлықтың жоқтығын дәлелдейді. Кеңейтілген фазалық кеңістікте термодинамикалық сипаттаманың Ван-дер-Ваальс жүйесіне тән белгілері анықталды: бірінші ретті фазалық ауысу, критикалық нүкте және орташа өріс теориясына сәйкес келетін критикалық көрсеткіштер

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \tfrac{1}{2}, \qquad \gamma = 1, \qquad \delta = 3.$$

4. Бардин-Янг-Миллс қара құрдымының жалпыланған шешімі.

Бейсызықтық электродинамика мен Янг-Миллс өрісі біріктірілген Бардин-Янг-Миллс ҚҚ-ының жаңа статикалық, сфералық симметриялы шешімі алынды. Бұл шешім Бардин ($v = 0$), Янг-Миллс ($g = 0$) және Шварцшильд ($v = 0,\ g = 0$) метрикаларын шекті жағдайлар ретінде қайта өндіреді. Қисықтық инварианттарының шекті болуы орталық сингулярлықтың жоқтығын дәлелдейді. Термодинамикалық талдау нәтижесінде Бекенштейн-Хокинг ауданы заңының бейсызықтық өрістік әсерлерге байланысты бұзылатыны, тұрақтылық аймақтары және максималды температурамен байланысты фазалық ауысу анықталды.

Диссертациялық жұмыста **алынған ғылыми нәтижелер** төмендегі ерекшеліктермен сипатталады:

1. QSSC моделінің Хаббл шиеленісі әлсірету қабілеті масштабты фактордың тербелмелі сипатын сандық тұрғыда талдау және MCMC әдісі арқылы кешенді зерттеу нәтижесінде көрсетілді. OHD, Pantheon (SN Ia) және BAO бақылау деректері негізінде модель параметрлері (α,β,η,h) калибрленіп, төмен қызыл ығысудағы бақылаулармен 1σ деңгейінде үйлесімділік анықталды. Зерттеу нәтижелері QSSC моделінің фантомдық тәрізді күйді ($\omega_{DE}(0) < -1$) қосымша өрістер енгізбей табиғи түрде бере алатынын және

жоғары қызыл ығысуларда ΛCDM космологиясына асимптотикалық түрде сәйкес келетінін көрсетті.

2. RN-AdS_5 ВН көлеңкесі плазмалы және плазмасыз ортада алғаш рет жан-жақты талданып, зарядтың (q), космологиялық тұрақтының (Λ) және плазма параметрінің көлеңке радиусына әсері толық параметрлік зерттелді. Алынған нәтижелер *M87** және *Sgr A** супермассивті ҚҚ-дарының бақылау деректерімен сапалық тұрғыда салыстырылды.

3. ЭГБ гравитациясындағы Бардин ҚҚ-ның термодинамикалық қасиеттері алғаш рет толық параметрлік тұрғыдан талданып, жылу сыйымдылығы, Гиббс энергиясы және $P-V$ критикалық құбылыстары анықталды. Фазалық ауысулардың құрылымы AdS кеңістігіндегі ҚҚ-дарға тән сұйықтық аналогиялары тұрғысынан алғаш рет жан-жақты зерттелді.

4. Бардин-Янг-Миллс ҚҚ-ының тұрақты шешімі негізінде оның көкжиек құрылымы, термодинамикалық шамалары (температура, энтропия, жылу сыйымдылығы) және энергия шығару қарқындылығы алғаш рет кешенді түрде талданды. Бейсызықтық электродинамика мен Янг-Миллс өрісінің сингулярлық емес ҚҚ қасиеттеріне әсері анықталды.

Нәтижелердің сенімділігі мен негізділігі

Зерттеу нәтижелерінің сенімділігі олардың QSSC моделіне қатысты бақылау деректерімен ($H(z)$, Pantheon, BAO) салыстырылып тексерілуімен расталады. ҚҚ-дардың көлеңке радиустары *M87** және *Sgr A** нысандарының бақылауларымен сапалық тұрғыда сәйкестендірілді.

Нәтижелердің ғылыми негізділігі импакт-факторы жоғары **WoS/Scopus** журналдарында жарияланған **4 мақала,** Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғарғы білім министрлігінің Ғылым және жоғарғы білім саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған басылымдарда 1 мақала және 5 халықаралық конференция баяндамалары арқылы дәлелденеді.

Автордың жеке үлесі

Автор ғылыми жетекшілердің басшылығымен зерттеудің барлық кезеңдеріне тікелей қатысты: өріс теңдеулерін алу, геометриялық және термодинамикалық сипаттамаларды аналитикалық талдау, сандық есептеулерді орындау, QSSC моделін бақылау деректерімен салыстыру және алынған нәтижелерді интерпретациялау. Барлық негізгі аналитикалық және MCMC сандық есептеулер автордың жеке үлесімен жүзеге асырылды.

Жұмыстың апробациясы

Диссертациялық зерттеу барысында алынған нәтижелер келесі ғылыми конференциялар мен семинарларда ұсынылып, сынақтан өтті: Студенттер мен жас ғалымдардың «Gylym jáne bilim-2019» XIV Халықаралық ғылыми конференциясында (Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, 2019), Қазақ физикалық қоғамының екінші конференциясында (Қазақ-Британ техникалық университеті, Алматы, 2019); «Қазіргі білім беру

кеңістігіндегі физика-математика ғылымдарының рөлі» VI Халықаралық ғылыми-практикалық конференция (Атырау, 2021).

Жалпы 10 ғылыми жұмыс жарияланды: 4 мақала **WoS/Scopus** базаларында, 1 мақала ҚР БҒМ ұсынымды журналында, 5 халықаралық конференция материалында.

Диссертация тақырыбының ғылыми жұмыс жоспарларымен байланысы

Диссертациялық жұмыс мемлекеттік бюджеттен қаржыландырылатын келесі екі жоба аясында орындалды:

– «Гравитацияның жалпыланған теорияларына негізделген Ғаламның эволюциясын зерттеу»(AP09261147, 2021-2023 жж.);

– «Метрикалық-аффиндік гравитация теориясының космологиясын зерттеу» (AP09058240, 2021-2023 жж.).

Жұмыстың теориялық және практикалық маңыздылығы

Зерттеу нәтижелері ҚҚ-дардың сингулярлық емес модельдеріндегі геометриялық және термодинамикалық қасиеттерді нақтылауға, олардың физикалық параметрлерін (құрамдас өрістер, заряд, масса, космологиялық тұрақты) бағалауға мүмкіндік береді.

QSSC моделінің параметрлерін бақылау деректері негізінде калибрлеу Хаббл шиеленісін түсіндірудің жаңа феноменологиялық механизмін ұсынады. RN-AdS_5 және Бардин типті ҚҚ-дардағы фотондық сфера мен көлеңке радиустары супермассивті ҚҚ (*M87*, Sgr A**) бақылауларымен салыстырылып, теориялық модельдерді астрофизикалық деректермен сәйкестендіру үшін жаңа мүмкіндіктер береді.

Диссертациялық жұмыстың құрылымы мен көлемі. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, 4 бөлімнен, қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Жұмыс 30 суреттен, 165 формуладан, 23 кестеден, 203 әдебиеттер тізімі мен 98 бетті қамтиды.

1 ТЕРБЕЛМЕЛІ ҒАЛАМ, ФАНТОМ ҚИЫЛЫСЫ ЖӘНЕ ХАББЛ ПАРАМЕТРІНІҢ ШИЕЛЕНІСІ

Қазіргі космология жоғары дәлдікті бақылау деректерімен қатар, іргелі теориялық модельдерді талап ететін күрделі ғылыми сала болып қалыптасты. Ғаламның ұлғаю тарихын түсіндіру, оның динамикалық сипатын анықтау және үлкен масштабтағы құрылымдардың қалыптасу үдерісін сипаттау мақсатындағы модельдер жаңа эмпирикалық деректерге байланысты үнемі нақтыланып, жетілдіріліп отыр. Осыған байланысты Ғаламның қазіргі даму ерекшеліктерін теориялық деңгейде талдау маңызды ғылыми міндет саналады.

Космологиядағы өзекті мәселелердің бірі - Ғаламның кеш кезеңдегі үдемелі ұлғаюының табиғатын анықтау болып табылады [1, p. 1009-1-19-63; 2, p. 565-585]. Бұл құбылысты күңгірт энергия арқылы түсіндіру кең таралған. ΛCDM моделі (Λ - космологиялық тұрақты, CDM - суық күңгірт материя) бақылаулармен жақсы сәйкестенгенімен, оның құрылымында «fine-tuning» және «coincidence» мәселелері байқалады. Осы себепті балама гравитациялық теорияларды немесе Ғаламның үдемелі ұлғаюын түсіндіретін жаңа динамикалық модельдерді қарастыру қажеттілігі туындайды [3, p. 1753-1934; 4, p. 3-502; 5, p. A.1-1-A.1-55]. Сонымен қатар жоғары энергия физикасына және феноменологиялық тәсілдерге негізделген скалярлық өріс модельдері де осы мәселемен байланысты кең талқыланған [6, p. 219-255; 7, p. 86-1-86-14].

ΛCDM моделінің жоғары қызыл ығысуларда тиімді болуы төменгі қызыл ығысуда өлшенетін Хаббл параметрімен салыстырғанда айтарлықтай айырмашылықты жоя алмайды. Мәселен, Планк спутнигі $H_0 = 67.36 \pm 0.54$ км/с/Мпк мәнін көрсетсе, SH0ES жобасы $H_0 = 73.04 \pm 1.04$ км/с/Мпк нәтижесін береді [8, p. L7-1-L7-51]. Megamaser жобасы $H_0 = 73.9 \pm 3.0$ км/с/Мпк, ал H0LiCOW (COSMOGRAIL) $H_0 = 73.3^{+1.7}_{-1.8}$ км/с/Мпк мәнін ұсынады. Бұл айырмашылық 4.2σ деңгейіне дейін жетіп, Хаббл параметрінің шиеленісі ретінде белгілі проблеманы қалыптастырады. Осы шиеленісті төмендетуге бағытталған әртүрлі балама модельдер ұсынылып келеді [9, p. 121302; 10, p. 221301; 11, p. 043528; 12, p. 103521; 13, p. L6-1-L6-5; 14, p. 023523; 15, p. 044-1044-29; 16, p. 043528; 17, p. 017-1-017-13; 18, p. 067].

Хаббл параметрі шиеленісін түсіндіру мақсатында скалярлық өрістерге негізделген күңгірт энергия модельдері мен модификацияланған гравитация тәсілдері кең қарастырылып жүр. Осылардың ішінде Ғаламның масштабты факторы монотонды ұлғаймай, тербелмелі сипат көрсететін квазистационарлық күй космологиясы (QSSC) ерекше назар аударады. Бұл модель [19, p. 437-456] зерттеуінде алғаш ұсынылып, кейінгі еңбектерде [20, p. 1007-1018; 21, p. 729-738] балама космологиялық теория ретінде талқыланған. Оның теориялық негіздері мен нақты шешімдері [22, p. 191-211; 23, p. 703-711], жеңіл ядролардың түзілуі [24-26], құрылымдардың қалыптасуы [27], бақылау сынақтары [28, 29] және тұрақтылық мәселелері [30] секілді аспектілері де кеңінен зерттелген. Сонымен қатар QSSC Ғаламның қазіргі ұлғаюын сипаттау тұрғысынан да қарастырылған [31-38]. Бұл теорияның бастапқы

сингулярлықтан бос болуы және кеш кезеңдегі үдемелі ұлғаюды түсіндіру мүмкіндігі оны маңызды балама сценарий ретінде қарастыруға мүмкіндік береді.

QSSC моделінің қосымша өрістерді қолданбай-ақ, кемінде фондық деңгейде, жоғары қызыл ығысуға дейін Ғаламның эволюциясын бақылау деректерімен үйлестіру қабілеті де ерекше мәнге ие. Сұйықтыққа толтырылған Ғалам үшін $\omega \geq -1$ болса, онда $\dot{H} \leq 0$ болады. Ал $\dot{H} \geq 0$ жағдайында күй теңдеуі параметрі $\omega_x \not\leq -1$ мәнін қабылдайды. Бұл жағдай Ғаламның қазіргі ұлғаю дәуірімен байланысты. [39] еңбекте Хаббл параметрін толық сипаттау үшін кемінде екі өрістің қажет екендігі көрсетілген. Фантомдық шекарадан өту бір скаляр өріс арқылы да сипатталуы мүмкін [40], бірақ мұндай модельдер фазалық кеңістіктегі шектеулі траекториялармен ғана жүзеге асады және космологиялық ауытқуларға қатысты тұрақсыз келеді. Осы себепті квинтомдық екі өрістік модельдер жиі қолданылады [41-43]. Дегенмен, $\omega_x \leq -1$ шартын скалярлық-тензорлық гравитацияда бір скаляр өрісі бар модельдер де орындай алады. Модификацияланған гравитациядағы қайта құру әдісі арқылы Ғаламның үдемелі ұлғаюын сипаттауға болатындығы да көрсетілген [44-46].

1.1 Квазистационарлық күй космологиясының фондық деңгейінің құрылымы

Квазистационарлы космологияда әсер мына түрде қарастырылады:

$$S = \int \sqrt{-g}\left(\frac{R}{16\pi G} + L_m - \left(\frac{f}{2}\right)\partial_\mu C \partial^\mu C + \frac{\Lambda}{8\pi G}\right)dx^4 \qquad (1.1)$$

мұнда C-өрісі (creation field) – теріс энергиялық өріс, R - Риччи тензорының скаляры, ал L_m - материя Лагранжианы.

Әсерді вариациялау барысында келесідей модификацияланған Эйнштейн теңдеуі шығады:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G(T^m_{\mu\nu} + T^C_{\mu\nu}) \qquad (1.2)$$

мұнда теңдеудің оң жағы энергия-импульс тензоры, сол жағы кеңістік уақыт қисықтығын сипаттайды.Тартылыс күшіне қарсы C-өрісінің репульсиясы қосылып, Ғаламның тұрақты кеңеюі қамтамасыз етіледі.

Тербелмелі Ғалам біртектілік пен изотропия шарттарын қанағаттандыратынын және осылайша стандартты Фридман-Робертсон-Уокер метрикасын қолдануға болады:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right). \qquad (1.3)$$

мұнда $a(t)$ уақытқа тәуелді масштабты фактор. Масштаб факторы галактикалар арасындағы қашықтықтың өзгеруін сипаттайды.

Модификацияланған үздіксіздік теңдеуі:

$$\dot{\rho}+3H(\rho+p)=\left(\frac{f\dot{C}^2}{8\pi G}\right)\succ 0 \qquad (1.4)$$

мұнда ρ - энергия тығыздығы, p - қысым және H - Хаббл параметрі. Бұл теңдеу QSSC-дің негізгі ерекшелігі – материяның үздіксіз жаратылуын математикалық түрде көрсетеді.

Модификацияланған Фридман теңдеулері:

$$H^2=\frac{8\pi G}{3}\rho+\frac{f}{6}\dot{C}^2+\frac{\Lambda}{3} \qquad (1.5)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi G}{3}\rho+\frac{f}{6}\dot{C}^2+\frac{\Lambda}{3} \qquad (1.6)$$

Мұнда $\frac{\ddot{a}}{a}$ – масштаб факторының нормаланған үдеуі, Ғаламның қаншалықты жылдам үдейтіндігін көрсетеді.

Жоғарыдағы (1.5) және (1.6) Фридман теңдеулерінен $\rho\rightarrow 0$, $\Lambda<0$

$$H=\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \qquad (1.7)$$

Бұдан

$$a(t)=\exp\left(\frac{t}{P}\right), P=\frac{3}{\Lambda}, \qquad (1.8)$$

теріс Λ космологиялық тұрақты ұзақ мерзімді экспоненциалды өсуді қамтамасыз етеді, сингулярлық жоқ. (1.7) және (1.8) теңдеулерді қолдана отырып тербелмелі Ғаламды актуализациялау үшін масштабты фактордың келесі формасы ұсынылады:

$$a(t)=\exp\left(\frac{t}{P}\right)\left[1+\eta\cos\frac{2\pi t}{Q}\right]. \qquad (1.9)$$

мұнда P және Q уақыт өлшемі болып табылады, ал η қандай да бір өлшемсіз тұрақты параметр. Бұл масштабты фактор формасын таңдау Хойл, Бербидж және Нарликардың бірнеше мақалаларында кеңінен сипатталған[19, p. 437-456; 20, p. 1007-1018; 21, p. 729-738; 22, p. 191-211; 23, p. 703-711]. Бұл параметрлеудің негізгі мәні келесідей:

$\eta\rightarrow 0$ шектерінде бұл де-Ситтер эволюциясын сипаттайды.

$t\rightarrow 0$, болғанда $a(t)\rightarrow 1+\eta$ Осылайша, Үлкен жарылыстың стандартты ерекшелігі QSSC сценарийлерінде туындамайды.

P және Q өлшемді шамалар болғандықтан, келесідей ұсыным жасалды:

$$P = \alpha t_0\,,\ Q = \beta t_0. \tag{1.10}$$

мұнда α және β анықтама бойынша өлшемсіз параметрлер, ал t_0 – ағымдағы ғарыштық t уақыттың мәні.

Сәйкесінше, Хаббл параметрі $H(t)$ (1.9) теңдеуден төмендегідей өрнектеледі:

$$H(t) := \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{1}{\alpha t_0} - \frac{2\pi\eta\sin(\zeta_t)}{\beta[1+\eta\cos(\zeta_t)]t_0}, \tag{1.11}$$

мұнда $\xi_t = \dfrac{2\pi t}{\beta t_0}$. Егерде $\eta \to 0$, онда Ғаламның тербелмелі сипаты өзгеріп, Хаббл параметрі тұрақты болады.

Жоғарыда келтірілген теңдеуден ғарыштық уақыттың t_0 ағымдағы мәнін H_0 бойынша алуға болады:

$$t_0 = \frac{1}{\alpha H_0} - \frac{2\pi\eta\sin(\zeta_0)}{\beta H_0[1+\eta\cos(\zeta_0)]}, \tag{1.12}$$

мұнда $\xi_0 = \dfrac{2\pi}{\beta}$. Стандартты тербелмейтін Ғаламды жүзеге асыру үшін η нөлге айналуы тиіс, бұл космологиялық эволюцияны β шамасына тәуелсіз етеді. Нәтижесінде шартты β тербеліс жиілігі η параметрлермен реттеледі. Сондай-ақ, қалған α параметрін стандартты космологиялық $a(t)$ эволюциялық профильдердегі уақыт дәрежесі ретінде түсіндіруге болатынын атап өту маңызды, мысалы, сәулелену мен материя үстемдік ететін дәуірде сәйкесінше $1/2$ және $2/3$ аламыз (1.1-сурет).

QSSC моделінің ΛCDM шегін табу үшін алдымен ω_{tot} күй параметрінің толық теңдеуін анықтаймыз, ол келесідей анықталады:

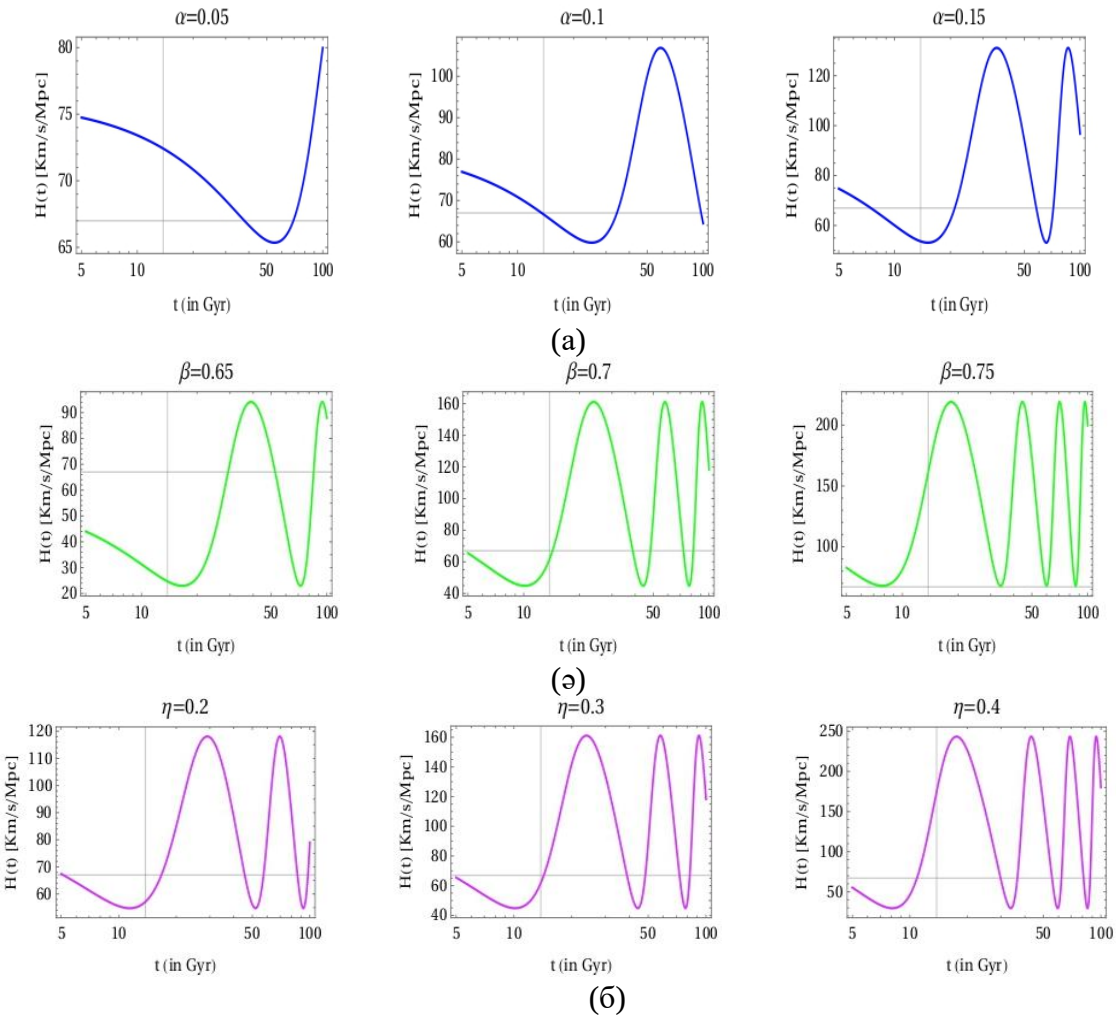
$$\omega_{tot}(t) = -1 - \frac{2}{3}\frac{\dot{H}(t)}{H(t)^2}, \tag{1.13}$$

мұнда $\dot{H}(t)$ төмендегідей өрнекпен сипатталады:

$$\dot{H}(t) = \frac{4H^2\pi^2\alpha^2\eta(1+\eta\cos(\zeta_0))^2\,\mathrm{X}(t)}{\mathrm{Y}(t)^2[\beta(1+\eta\cos\zeta_0) - 2\pi\alpha\eta\sin(\zeta_0)]^2}, \tag{1.14}$$

мұнда

$$\mathrm{X}(t)=\eta+\cos\left(\frac{2H\pi t}{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{2\pi\eta\sin(\zeta_0)}{1+\eta\cos(\zeta_0)}}\right),\quad \mathrm{Y}(t)=1+\eta\cos\left(\frac{2H\pi t}{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{2\pi\eta\sin(\zeta_0)}{1+\eta\cos(\zeta_0)}}\right). \tag{1.15}$$



(а) – $\beta=0.7$ және $\eta=0.3$ болғандағы жағдай; (ә) – $\alpha=2$ және $\eta=0.3$ болғандағы жағдай; (б) – $\alpha=0.2$ және $\beta=0.3$ болғандағы жағдай

Сурет 1.1 – $H(t)$ эволюциясының t ғарыштық уақытпен α,β және η анықтамалық мәндер жиынтығы үшін көрсеткіштері

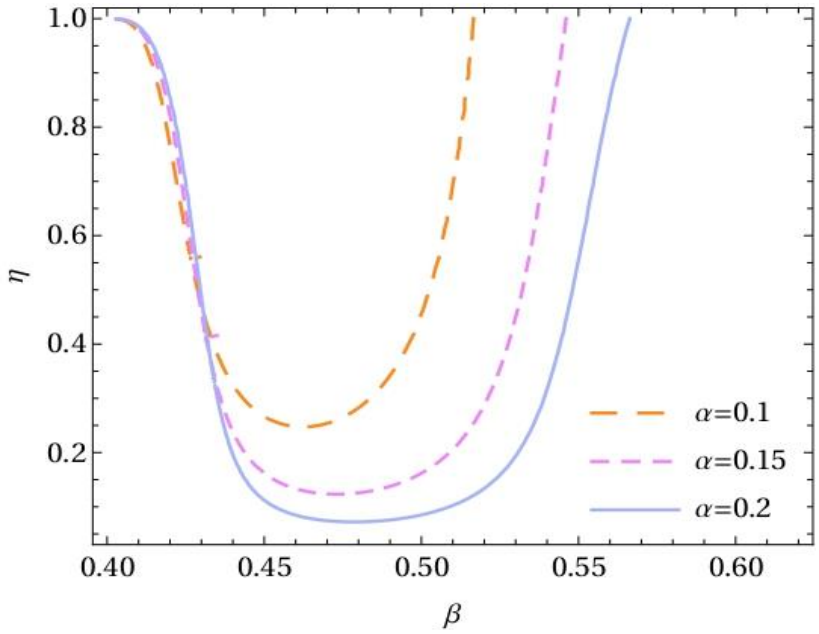
Ескерту – Әдебиет негізінде құралған [46].

Жоғарыдағы (1.13), (1.14) және (1.15) теңдеулерді қолдана отырып, модель параметрлерінің берілген ω_{tot} параметрлік мәндері үшін эволюцияны есептеуге болады. QSSC моделі үшін КЭ күй теңдеуінің тиімді параметрін бағалау үшін толық күй теңдеуінің өрнегі қолданылады, яғни

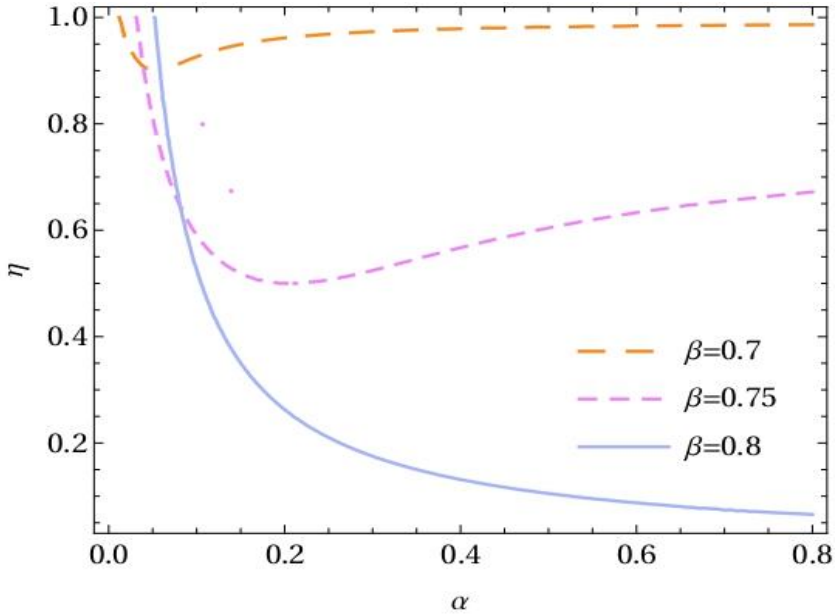
$$\omega_{tot}=\omega_{DE}\Omega_{DE}+\omega_{M}\Omega_{M}. \tag{1.16}$$

мұнда Ω_M - заттың тығыздық параметрі. Затты қысымсыз деп қарастырғандықтан, $\omega_M=0$ тең деп алуымызға болады. КЭ күй теңдеуінің

нақты профилін алу үшін QSSC-мен байланысты сандық қиындықтарға байланысты тек осы дәуірмен ($z=0$) шектелу керек. Сонымен қатар (1.5) және (1.8) теңдеулерді түрлендіре отырып, $H_0 = 70$ Км/с/Мпк және $\Omega_{DE} = 0.67$ мәндерін қабылдай отыра, ΛCDM моделі шегін бере алатын параметрлік диапазондарымызды анықтай аламыз, яғни $\omega_{DE}(0) = -1$.



(а)



(ә)

Сурет 1.2 – Контурлары QSSC моделі - 1-ге тең КЭ күй теңдеуімен ΛCDM моделіне дейін азаятын жағдайларды білдіреді

Ескерту – Әдебиет негізінде құралған [46].

1.2(а), 1.2(ә)-суреттің нұсқаларында біз α және β, әртүрлі мәндері үшін контур сызықтарын бейнелейміз және қазіргі дәуірдегі ΛCDM моделі жағдайына сәйкес келеді.

Төрт параметр жиынтығын бағалау үшін $p = \{\alpha, \beta, \eta, h\}$ $(h = H_0/(100 км/с/Мпк)$, (1.3) теңдеуді Z қызыл ығысу немесе масштаб факторы $a(t)$ арқылы өрнектеу қажет. Бірақ (1.1) теңдеудің күрделі өрнектелуіне байланысты немесе терминдерінде дәл аналитикалық форманы алу қиын. Сондықтан (1.1) теңдеуден сандық түрде бағалаймыз, содан кейін оны $a(t)$ теңдеуге қайта саламыз (1.3). Осылайша, $H(z)$ бағалауға болады, оны бақылау деректерінің жиынтықтары арқылы параметрлік бағалаулар үшін пайдалануға болады. Дегенмен, қазір масштаб факторының $a(t)$ нормаланбағанын көреміз, сондықтан Z қызыл ығысу масштаб факторымен t_0 байланыстырамыз:

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t)}, \quad \text{мұнда } a(t_0) = \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)[1 + \eta\cos(\zeta_0)]. \tag{1.17}$$

Сондай-ақ, Ғаламның тербелмелі әсерін көрсетпесе де, кем дегенде бұрын, шкала факторының тербелмелі сипаты қатаң шектелетін бақылауларға сәйкес келетінін атап өтуге болады. Шын мәнінде, η параметр бірден аз болуы керек және кез келген нөлдік емес мән тербелістерді тудырады. Сонымен қатар, тербеліс кезеңі Ғаламның жасына тең немесе одан үлкен болуы керек, әйтпесе ол CMB, Ia типті асқын жаңалар, LSS және т.б. бақылаулармен қойылған бірнеше қатаң шектеулерге әсер етуі мүмкін.

1.2 Квазистационарлық космология бойынша бақылау шектеулері

Параметрлік бағалаулар үшін $H(z)$ + Pantheon (binned) + BAO деректер жиынтығын пайдалана отырып, MCMC компьютерлік модельдеулерін орындаймыз. Ол үшін L Likelihood функциясын келесідей анықталады:

$$\mathrm{L} \propto \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right). \tag{1.18}$$

Параметрлік бағалауымызда отыз $H(z)$ өлшеуден тұратын $[z \in 0.07, 1.965]$ аралығындағы жиынтығы [50] мақаладан алынды. Ia типті Pantheon асқын жаңа үшін Хаблл параметрін $E(z_i) = H(z_i)/H_0$ деректер жиынтығының $z = 0.07$-ден $z = 1.5$-ке дейінгі аралықтағы алты түрлі қызыл ығысуы үшін алынған [47]. Бұл компиляция туралы ақпаратты тиімді жинақтайды – Pantheon [48] және $z > 1$ болған кезде CANDELS және CLASH Multy-Cycle Treasury (MCT) бағдарламаларын қолданып алған мәліметтердің тоғыз мәні $1.5 < z < 2.3$ аралығында жатады. Сондай-ақ Гаусс таралымына сәйкес келмейтін $z = 1.5$ деректер нүктесі өткізіп жіберілген.

Қарастырылып отырған модельде қазіргі заманғы зат тығыздығы параметрінің ешқандай нақты түрі жоқ болғандықтан, басқа BAO деректер жинағын енгізу қиынға соғатыны ескерілген. Бұл α, β сұйықтардың тығыздығы параметрі туралы ақпаратты ішкі кодтауымен байланысты, сондықтан зат тығыздығы параметрін бөлек шектей алмайды. Сәйкесінше, біріктірілген деректер жиынтығы үшін беру үшін бөлек χ^2қосылады:

$$\chi^2_{total} = \chi^2_{OHD} + \chi^2_{Pan} + \chi^2_{BAO}. \tag{1.19}$$

$SH0ES$ ынтымақтастығы асқын жаңа жұлдыздардың абсолютті шамасын тікелей өлшегенімен, айырмашылық ерте модификацияларға қарағанда Ғаламның ұлғаю жылдамдығының өзгеруі сияқты кейінгі түзетулер үшін онша маңызды болмауы мүмкін [49]. Дегенмен, қарастырып отырған модельді гауссианға $SH0ES$ ынтымақтастығы ұсынған Хаббл тұрақтысын өлшеуге сәйкестендіруге күш салып және MCMC модельдеуін іске қосу үшін параметрлер үшін келесі алдын ала диапазон ұсынылған (1-кесте).

Кесте 1 – Марков тізбегі Монте-Карло (MCMC) әдісінің сандық параметрлеріне арналған диапазондар

Параметр	Диапазон
α	[-0.3, 0.3]
β	[-0.5, 1]
η	[0, 0.5]
h	[0.55, 0.85]

Параметрлер жинағы арасындағы алынған 2σ нәтиже параметрлік контурлар α, β, η және h 1.3-суретте көрсетілген. Бұл графикте біріктірілген деректер жиыны үшін рұқсат етілген параметрлік аймақ OHD-ге қарағанда күтілетін нәтижеден аз екенін көруге болады. Сонымен қатар, α параметрмен де, β параметрмен де жоғары h корреляция бар. Параметрлердің есептік мәндері төменде келтірілген. Бір қызығы, Хаббл тұрақтысының есептік мәні екі деректер жиынтығы үшін де ΛCDM модельдерінен жоғары болады.

Мұнда QSSC модель үшін h мәнінің осылаша өсуі оның тербелмелі сипатына байланысты екені ескеріледі:

$$\alpha = 0.154^{+0.032}_{-0.028}, \quad \beta = 0.760^{+0.011}_{-0.011}, \quad \eta = 0.366^{+0.091}_{-0.077}, \quad h = 0.718^{+0.018}_{-0.019}. \tag{1.20}$$

Жоғарыдағы ең қолайлы бағалауларының көмегімен 1.4-суретте z салыстырмалы түрде $H(z)$ эволюциялық сипаттама құрылған. Бұл суретте Хабблдың төмен қызыл ығысу h бақылауларымен үйлесетін қазіргі дәуірге қарай табиғи түрде ұлғаю үрдісі байқалады. Бұл ұлғаю QSSC сценарийлерінде табиғи түрде көрініп қана қоймайды, сонымен қатар Хаббл тұрақтысы кіші z бақылаулардың үлкен маңызына ие.

КЭ күйінің теңдеуінің сәйкес параметрін бағалау, Планк 2018 нәтижелерін зат тығыздығы параметрі үшін ең қолайлы деп саналады.

Жоғарыдағы (1.7) және (1.5) теңдеулерді және (1.11) арқылы берілген ең жақсы сәйкестікті пайдалана отырып, теңдеуден Ғаламның параметрі мен нақты жасын бағалауға болады:

(1.21)

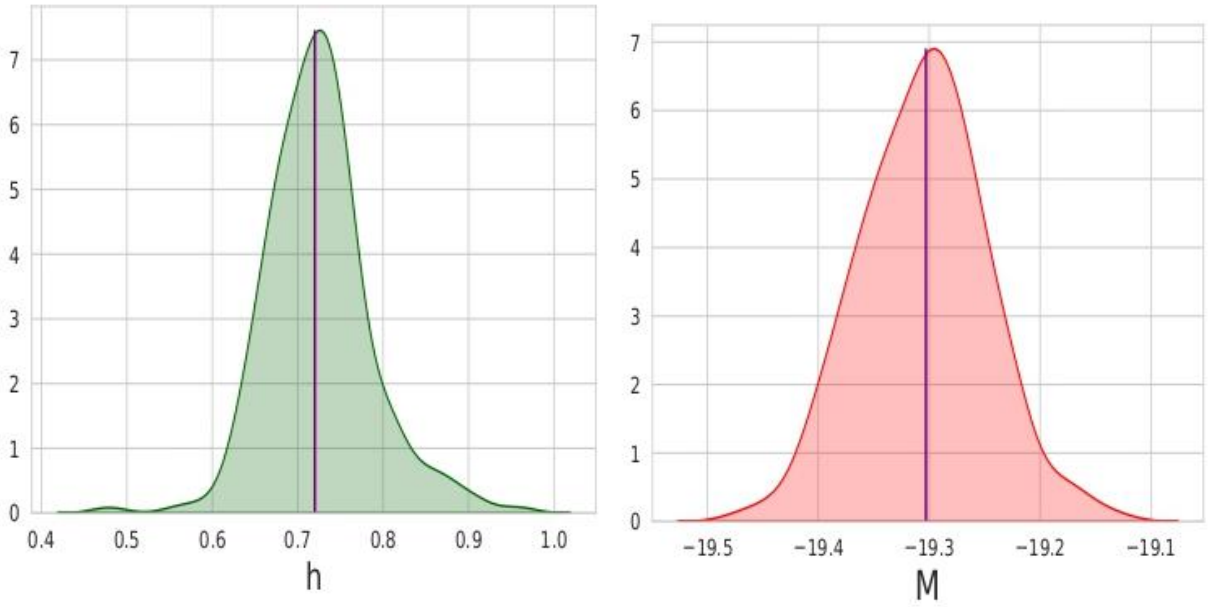
Бұл жерде Ғаламның қазіргі дәуірмен және Ғаламның жасының төменгі шегіне, яғни 13,8 миллиард жылға сәйкес келетіндігін атап өтеміз [51-55]. Бұл QSSC сценарийлерінде Үлкен жарылыстың орнына Ғаламның тербелмелі қозғалысы жалғасатынымен байланысты Ғаламның жасының үлкен мәніне әкеледі. Оның үстіне, Ғаламның жасы шар тәрізді жұлдыздар шоғыры жасына сәйкес келетіндей үлкен. Сондай-ақ, ΛCDM моделі шегінде параметрдің елеулі ауытқуын көрсетеді. Бұл (ΛCDM моделі үлгісіне сәйкес) қазіргі уақытта фантомдық аумақта екенін білдіреді және толығымен Ғаламның тербеліс табиғатынан туындайды. Ғаламның жасы шар тәрізді жұлдыздар шоғыры ғұмырына сәйкес келу үшін жеткілікті мөлшерде үлкен мәнге ие болуы керек. Назар аударсақ шегінде параметрі ΛCDM модельден айтарлықтай ауытқуды көрсетеді.

Сурет 1.4 – OHD үшін эволюциялық профильдер және оның Pantheon деректер жиынтығымен үйлесуі

Ескерту – Әдебиет негізінде құралған [46].

Жоғарыда 1.4-суретте көрсеткеніміздей, параметр QSSC сценарийі үшін қазіргі дәуірде үлкенірек болады, бұл әлі де қызықты, дәлірек айтсақ, бұл қазіргі және ерте космологиялық деректер арасындағы қайшылықтардың ұлғаюы немесе әлсіреуі әлі де сақталатынын білу маңызды. M абсолютті шаманы шеттету. Себебі $SH0ES$ стандартты шамдар болып саналатын типтегі асқын жаңа жұлдыздың абсолюттік шамасын цефеидтер кезеңінің жарықтылық қатынасы арқылы жергілікті геометриялық байланыстыру қашықтығына асажаңа галактикаларының қашықтықтарын модуляциялау арқылы өлшейді.

Содан кейін, шаманың пантеон үлгісінің қызыл ығысуына қатынасын қолдана отырып, H_0 мәні өлшеу арқылы есептеледі және нәтижесінде H_0 параметрі шын мәнінде абсолютті шаманың шиеленісі болып табылады деген болжам жасалды. M асқын жаңа жұлдыз, өйткені H_0 параметрінің $SH0ES$ өлшемі бағалауға негізделген.



(а) (ә)

(а) – h ықтималдықты бөлу; (ә) – M ықтималдықты бөлу

Сурет 1.5 – Хаббл тұрақтысы h және абсолютті шамасы M үшін ықтималдықты бөлу функциялары

Ескерту – Әдебиет негізінде құралған [46].

1.5-суретте, Хаббл тұрақтысы мен M абсолютті шамасы бір бірімен жоғары корреляцияға ие екенін ескере отырып, H_0 және M шамаларының екеуіне де Пантеон және Хаббл деректер жиынын пайдалана отырып, толық параметрлік бағалау жасалған. Болжалды параметрлер төменде берілген:

$$\alpha = 0.163^{+0.022}_{-0.020}, \quad \beta = 0.749^{+0.024}_{-0.017}, \quad \eta = 0.358^{+0.062}_{-0.047}, \quad h = 0.719^{+0.047}_{-0.049}, \quad M = -19.302^{+0.047}_{-0.061} \tag{1.22}$$

QSSC моделінің теориялық және бақылаулық аспектілері жан-жақты қарастырылып, оның Хаббл шиеленісін әлсірету әлеуеті сандық және феноменологиялық тұрғыдан бағаланды. Негізгі теоретикалық жоба — масштабты фактордың тербелмелі сипаты — модельдің динамикасында шешуші роль атқаратыны анықталды: тербелмелі масштабты фактор $a(t)$ Хаббл параметрі $H(t)$-тің қазіргі дәуірге жақын аймақта минимумға жетіп, кейін қайта артуына әкеледі. Бұл кинематикалық эффект төмен қызыл ығысуларда байқалатын жоғары H_0 мәндерін табиғи түрде түсіндіруге мүмкіндік береді және осылайша Хаббл шиеленісін феноменологиялық тұрғыдан әлсірету механизмі ретінде көрінеді.

Жоғарыда келтірілген бағалаулардан, тіпті асқын жаңа жұлдыздардың абсолютті шамасының өзінде Хаббл тұрақтысының мәні алдыңғы алынған бағалауларда (1.12) бірдей болатынын көруге болады. Сондай-ақ, абсолюттік жұлдыздық шама мәні $M = -19.302^{+0.047}_{-0.061}$, бақыланатын өлшемге әсер етпейтінін көреміз [50].

Модельдің бақылаулық сәйкестігін тексеру мақсатында $a(t)$-ның тербелмелі сипаттамасын қолдана отырып, параметрлік талдау жүргізілді. OHD ($H(z)$), Pantheon жинағындағы SN Ia және BAO деректері қолданылып, модель параметрлері $\{\alpha, \beta, \eta, h\}$ MCMC арқылы калибрленді. Сандық бағалаулар нәтижесінде алынған хабблдық баға $h = 0.718^{+0.018}_{-0.019}$ төмен қызыл ығысулардың өлшеулерімен 1σ деңгейінде үйлесімді болып шықты. Бұл сандық сәйкестік QSSC моделінің Хаббл шиеленісін елеулі түрде жеңілдетуге қабілетті екенін көрсетеді: модельдің тербелмелі механизмі H_0 мәндерінің жоғары болуы қажеттігін түсіндіре отырып, төмен және жоғары қызыл ығысулар арасындағы статистикалық айырмашылықты азайтады.

Хаббл параметрі тербелмелі табиғаты бойынша Ғаламның эволюциясының қазіргі дәуірге жақын минимумға жету арқылы айналады (1.4-сурет).

Тараудағы талдаулар эффективті күңгірт энергияның күй параметріне (эффективті ω_{DE}) де нақты болжамдар берді. Жалпы күй теңдеулерінен және алынған параметрлік бағалаулардан қазіргі дәуір үшін тиімді күй параметрінің аралығы алынды: $\omega_{DE}(0) \approx [-1.036, \ -1.11]$, яғни тиімді күй фантомдық аймаққа өтетіндігі анықталды. Ең маңыздысы — бұл фантомдық тәріздін QSSC модельінде ешқандай қосымша өріс немесе артық еркіндік дәрежесін енгізбей-ақ масштабты фактордың тербелмелі геометриясынан табиғи түрде шығатыны дәлелденді. Осыған орай QSSC ΛCDM-ден айырмашылығы ретінде күңгірт энергия табиғатын түсіндіруде балама механизм ұсынады.

Модельдің жоғары қызыл ығысуларға қатынасы тексерілді: параметрлік талдаудың нәтижелері QSSC моделінің жоғары z-да ΛCDM космологиясына асимптотикалық түрде жақындайтынын көрсетті. Бұл қасиет модельдің ерте Ғалам туралы бақылаулармен (мысалы, CMB/Planck) үйлесімді болуын

қамтамасыз етеді және QSSC-тың кеш және ерте кезеңдерде жүйелі түрде қолдануға болатын тұжырымдама екенін растайды.

Ғаламның жасы мәселесіне қатысты алынған сандық нәтиже $t(0) = 45.05\,Gyr$ түрінде берілді. Бұл есептелген мән QSSC модельінің тербелмелі динамикасына тәуелді есептелген және стандартты ΛCDM-ның төменгі шек мәнінен айтарлықтай жоғары болғанымен, тарауда көрсетілген бағалау мен көрші бақылаулармен логикалық қайшылыққа түспейтін жағдай деп танылды. Анықталуынша, QSSC шартында бір немесе бірнеше тербеліс циклдері Ғаламның уақытша эволюциясын айқындай алады — бұл модельдің ішкі уақыттық құрылымының ерекшелігі.

Сонымен қатар, модельдің статистикалық бағалануында белгілі бір шектеулер байқалды. Мысалы, ақпараттық критерийлер (мысалы, BIC) бойынша қарапайымдылық критерийлері кей жағдайда ΛCDM артықшылыққа қоюы мүмкін; сонымен қатар тербеліс параметрлерінің (әсіресе η және тербеліс амплитудасы) кейбір аймақтары CMB бақылаулары бойынша қатаң шектеулерге ұшырайды, сондықтан тербелістердің амплитудасы мен периоды жоғары z-да басылып қалуы қажет болады. Бұл шектеулер QSSC модельінің параметрлік кеңістігін әрі қарай мұқият тексеруді талап етеді.

Қорытындылай келе, тарауда жүргізілген анализ QSSC моделінің масштабты фактордың тербелмелі сипатына негізделген динамикасы Хаббл шиеленісін жеңілдетудің феноменологиялық және сандық тұрғыдан негізделген механизмі бола алатынын көрсетті: модель төмен қызыл ығысудағы бақылаулармен үйлесіп, жоғары қызыл ығысуда ΛCDM-ға асимптотикалық түрде жақындап, тиімді күңгірт энергияның фантомдық тәріздін табиғи түрде тудырады. Дегенмен, толық тексеру үшін қосымша деректер мен жан-жақты статистикалық салыстырулар қажет: болашақта төмен қызыл ығысуларға арналған Хаббл диаграммасының кеңейтілген деректер жинақтарын пайдалану, галактикалардың қалыптасуына модельдің ықпалын бағалау және модельдің инфляция кезеңімен үйлесімділігін зерттеу маңызды бағыттар болып табылады.

2 БЕСӨЛШЕМДІ РЕЙСНЕР-НОРДСТРЕМ ҚАРА ҚҰРДЫМЫНЫҢ КӨЛЕҢКЕСІ

ҚҚ-дардың концепциясы XVIII ғасырдағы Ньютон физикасына негізделген гипотезалардан бастау алды. 1783 жылы Джон Митчел алғаш рет жарықтың да шыға алмайтындай күшті гравитациялық өріске ие «Күңгірт жұлдыздар» идеясын ұсынды. 1796 жылы Пьер-Симон Лаплас осыған ұқсас болжам жасады, ол Ньютонның гравитациялық теориясына сүйенді. Бұл идеялар сол кездегі теориялық болжамдар ретінде қалып, эмпирикалық дәлелденбеді.

XX ғасырда Альберт Эйнштейннің 1915 жылы жарияланған ЖСТ ҚҚ-дардың теориялық негізін қалады. 1916 жылы Карл Шварцшильд Эйнштейн теңдеулерінің алғашқы нақты шешімін ұсынып, статикалық, айналмайтын ҚҚ-ның моделін сипаттады. Бұл модель Шварцшильд метрикасы деп аталады және ҚҚ-ның оқиға көкжиегін сипаттайтын Шварцшильд радиусымен байланысты болды. 1931 жылы Субрахманян Чандрасекар жұлдыздардың эволюциясы кезінде гравитациялық коллапсқа ұшырап, ҚҚ-ға айналуы мүмкін екенін дәлелдеді, бұл Чандрасекар шегі деп аталады.

1960 жылдары ҚҚ-дар теориясы одан әрі дамыды. Роджер Пенроуз сингулярлық теоремаларды дамытып, ҚҚ-дардың сингулярлық нүктелерінің бар екенін дәлелдеді. 1967 жылы Джон Уилер «Қара құрдым» терминін ұсынып, бұл құбылыстың ғылыми және танымал терминологияға енуіне ықпал етті. 1974 жылы Стивен Хокинг ҚҚ-дардың кванттық эффектілері арқылы энергия жоғалтып, радиация шығаратынын болжады (Хокинг радиациясы), бұл салыстырмалылық пен кванттық механиканың қиылысындағы маңызды серпіліс болды. Эмпирикалық дәлелдер XX ғасырдың соңы мен XXI ғасырдың басында жинала бастады. 1970 жылдары рентгендік жүйелерде ҚҚ-дардың болуы жанама түрде анықталды. 2015 жылы LIGO обсерваториясы екі ҚҚ-ның бірігуінен пайда болған гравитациялық толқындарды тіркеді, бұл ҚҚ бар екендігінің алғашқы тікелей дәлелі болды. 2019 жылы Оқиға көкжиегі телескопы (EHT) жобасы $M87^*$ галактикасының орталығындағы аса ауыр ҚҚ оқиға көкжиегінің көлеңкесін суретке түсірді, бұл тарихтағы алғашқы визуалды дәлел болды. 2022 жылы $Sgr\ A^*$ ҚҚ-ының да кескіні алынды, бұл біздің галактикамыздың орталығында ҚҚ-ның бар екендігін растады.

RN-AdS ВН зарядталған, айналмайтын ҚҚ-ның AdS кеңістігіндегі моделі. Ол ЖСТ, кванттық физика және термодинамиканың қиылысында маңызды роль атқарады. Негізгі сипаттамалары-электр заряды мен массасы бар, AdS теріс космологиялық тұрақтысына байланысты гиперболалық геометрия және Хокинг сәулеленуі мен термодинамикалық қасиеттері ҚҚ физикасының маңызды аспектілерін ашады.

Бұл тарауда зарядталған RN-AdS ВН пайда болған көлеңке зерттелді. Киллинг теңдеуі мен Гамильтон-Якоби теңдеуін пайдаланып, нөлдік бөлшектер үшін геодезиялық сызық теңдеулері есептеледі.

Әрі қарай геодезиялық нөлдік бөлшектерді пайдалана отырып, RN-AdS ВН (α,β) аспан координаталары мен көлеңке радиусы анықталады. ҚҚ көлеңкесіне графикалық талдау жасап, көлеңкенің қара шеңбер екені анықталды.

Көлеңке радиусына RH AdS ҚҚ зарядының және космологиялық тұрақты әсері де көрсетілген. Бұл жағдайда көлеңке радиусы зарядтың кему функциясы болып табылады. Сонымен қатар, плазмалық ортаның RN-AdS ВН көлеңкесіне әсерін зерттелген. Мұнда плазма параметрі артқан сайын дөңгелек көлеңке радиусы арта түсетінін көруге болады.

$M87^*$ және $SgrA^*$ ҚҚ-дарынан зарядтың және космологиялық тұрақтының шектеулі мәндері үшін көлеңке радиусын зерттейміз. Сонымен қатар, біз RN ҚҚ-ынан энергияның бөліну жылдамдығы талқыланады. Заряд, космологиялық тұрақты және плазма параметрі сияқты параметрлердің энергияның эмиссия жылдамдығына әсері графикалық түрде талданды.

ҚҚ Эйнштейннің ЖСТ ашылғаннан бері физиканың өзекті тақырыбы болып табылады. Қазіргі уақытта галактикалардың көпшілігінің ортасында ҚҚ-дар бар деген болжам бар, мысалы, Құс жолының галактикалық орталығында супермассивті ҚҚ Мерген A^* ($Sgr\ A^*$) орналасқан [56-58] және жақында бұл аса массивті ҚҚ-ның көлеңкесін ЕНТ бақыланды [59].

ҚҚ-ға жақын қозғалатын кез-келген нысандар күшті тартылыс күшіне ие және шекті радиуста ҚҚ-ға түсуі керек. Бұл күшті гравитациялық линзалау әсерінен болады. Егер жарықтандырылған фотон көзі ҚҚ-ның дәл артында болса, онда фотон бөлшектері ҚҚ-ға жақын жерде қозғала алады және алыстағы бақылаушыға көрінуі мүмкін жазықтықта көлеңке жасай алады. ҚҚ-ның көлеңкесін алғаш рет Бардин зерттеген [60]. Сфералық симметриялық статикалық (Шварцшильд) ҚҚ-дар дөңгелек пішінді көлеңке түсіре алатыны анықталды [61, 62], ал айналмалы (айналатын) ҚҚ дөңгелек пішіннен деформацияланған көлеңкелерді түсіреді [63-69].

Соңғы кезде ҚҚ-ның көлеңкесін зерттеу өзекті зерттеу саласына айналды және үлкен маңызға ие [69]. Шварцшильд ҚҚ-ының көлеңкесі зерттелген [70-73]. Айналмалы ҚҚ көлеңкесін гравитомагниттік және электр зарядымен бірге келесі жұмыста табуға болады [74], Гравитациялық линза Янис-Ньюман-Виникур Керр-Ньюман және Керр-Ньюман-AdS кеңістік уақыттары үшін оптикалық құбылыстармен бірге зерттелген [75-77]. Ғалымдар қарапайым ҚҚ [78-80], Керр ҚҚ-ы [60, p. 241], Керр-Ньюман ҚҚ-ы [81] және мульти ҚҚ-дар [82] сияқты басқа ҚҚ көлеңкесін зерттеді. Черн-Симонс пен Эйнштейн-Максвелл кеңеюіне байланысты өзгертілген гравитациядағы ҚҚ көлеңкесін [83] табуға болады. Дегенмен, Рэндалл-Сандрум бран Ғаламы жағдайындағы ҚҚ көлеңкесі [84] зерттеледі. Жақында Rastall гравитациясында коммутативті емес ҚҚ-ының көлеңкесін зерттеді [85, 86].

Көлеңке көмегімен жалпыланған Эйнштейн-Картан-Киббл-Скиама гравитациясын сынау [85, p. 064020] жылы жасалды. Жусуфи т.б. [85, p.064020] зарядталған Бардин ҚҚ-ының көлеңкелерін зерттеді. Космологиялық тұрақтысы бар айналмалы Ғалам ҚҚ-дарының көлеңкелі кескіні [87] жасалды.

Төрт өлшемнен жоғары өлшемдегі ҚҚ-ының шешімі өте маңызды. Қазіргі уақытта 5D ҚҚ шешімдері ішектер теориясы, Ғалам космологиясы және габарит/ гравитация дуализмі идеяларынан туындаған түрлі зерттеулерде қарастырылды. Кейбір қызықты және таңқаларлық нәтижелерді табуға болады [88]. Қосымша өлшемдер жалған еркіндік дәрежелерінің болуына байланысты бірегейлік теоремасын бұзады. Бес өлшемдегі ҚҚ шешімдерін зерттеу жоғары өлшемді кеңістік уақыт тривиальды емес топологияларды бекіте алатындығын көрсетеді [89, 90]. Голография контекстіндегі ҚҚ көлеңкелерінің құрылымы [91, 92] зерттелді. Жақында [93] бесөлшемді ГБ ҚҚ-ының көлеңкесі зерттелуде. Бесөлшемді айналатын Майерс-Перри ҚҚ-ының көлеңкесі [91; 92, p. 399-1-399-14] және айналмалы бесөлшемді зарядталған ҚҚ [94] зерттелді. Мұндай зерттеу шынымен де RN-AdS_5 ВН үшін ҚҚ көлеңкелерін зерттеуге жақсы мүмкіндік береді. RN-AdS_5 ВН көлеңкесі RN-AdS_5 ВН кеңістік уақытындағы Эйнштейн теңдеуінің статикалық, сфералық симметриялы вакуумдық шешімі болып табылады. RN-AdS_5 ВН жанындағы геодезиялық қозғалыстар [95] зерттеледі. Бұл тараудың мақсаты плазмасыз және плазмалық ортадағы зарядталған RN-AdS_5 ВН көлеңкесін зерттеу болып табылады.

Бұл тарау төмендегідей жүйелі түрде ұсынылған. (2.2) бөлімінде RN-AdS_5 көлеңкесіне шолу жасалған. Көкжиек функциясының оң нақты нөлінен оқиға көкжиегінің радиусы (2.3) бөлімінде есептеледі. (2.4) бөлімінде Гамильтон-Якоби теңдеуін қолдана отырып, Плазмасыз ортадағы RN-AdS_5 ВН айналасындағы (нөлдік) бөлшектердің қозғалысын талқылап және сайып келгенде, Плазмасыз орта үшін фотон сферасының радиусы есептелген. Плазмасыз орта үшін бұл ҚҚ көлеңкесі бөлімде зерттеледі.(2.5) бөлімде сонымен қатар әртүрлі зарядтар үшін көлеңке радиусы мен фотон сфера радиусының мәндері кестеге келтірілді. Көлеңкелі кескіндер параметрлердің әртүрлі мәндері үшін де берілген. Плазмасыз орта үшін көлеңке радиусына әртүрлі параметрлердің әсері (2.6) бөлімінде зерттелген. Плазмасыз орта жағдайына ұқсас, плазмалық ортаның қатысуымен геодезия (2.7) бөлімінде зерттеледі.

Мұндай плазмалық орта үшін көлеңке (2.8) бөлімінде берілген. Плазмалық ортадағы әртүрлі параметрлер үшін көлеңке радиусының әсері (2.9) бөлімінде толық қарастырылады. (2.10) бөлімінде RN-AdS_5 ВН энергия шығару жылдамдығы талқыланады. Сонымен бірге RN-AdS_5 ВН сәуле шығару жылдамдығы температура, жиілік және фотон радиусының көлденең қимасы сияқты әртүрлі параметрлерге байланысты екені көрінеді[96].

2.1 Бесөлшемді Рейснер-Нордстремнің қара құрдымы

Теріс космологиялық тұрақтысы бар бесөлшемді кеңістік-уақытын қарастырайық. ҚҚ маңындағы өріс теңдеулері келесі [95, p. 231-232] теңдеуімен берілген:

$$\overline{G}_{ab} = -\Lambda \overline{g}_{ab} + k_{(5)}^2 \overline{T}_{ab}, \tag{2.1}$$

мұнда $\bar{g}_{ab}$ 5D метрикалық (–,+,+,+,+) қолтаңбасы бар, мұндағы $\bar{G}_{ab}$-5D Эйнштейн тензоры, $\bar{T}_{ab}$ энергия-импульстік 5D тензорды білдіреді және Λ космологиялық тұрақтыны білдіреді. $k_{(5)}$ тұрақтысы төмендегідей анықталады:

$$k_{(5)}^2 = 8\pi G = M^{-3}, \tag{2.2}$$

мұнда G, $5D$ Ньютон тұрақтысы және M, $5D$ келтірілген Планк массасы.

Енді біз кеңістік-уақыттың тұрақты $\bar{K} = \frac{\alpha}{l^2}$ қисықтығы бар деп есептейміз. AdS геометриясы үшін, $\bar{K}$ коэффициенті теріс мәнге $\alpha = -1$ ие болады және dS геометриясы үшін $\bar{K}$ коэффициенті $\alpha = 1$ оң мәнге ие. Демек, кеңістік-уақыттың қисықтық радиусы келесідей болады:

$$l = \sqrt{\frac{3\alpha}{\Lambda}}, \tag{2.3}$$

және көкжиекке ие болу үшін қажетті ұзындық шкаласын береді. Бесөлшемді ҚҚ өрісі үшін сыртқы метрика арқылы берілген теңдеу төмендегідей:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_3^2, \tag{2.4}$$

мұнда бірлік үш өлшемді сфера бойынша келесі теңдеумен өрнектеледі

$$d\Omega_3^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta(d\phi^2 + \sin^2\phi d\psi^2). \tag{2.5}$$

RN-AdS$_5$ ВН ішіндегі Эйнштейн теңдеулерінің осы статикалық сфералық симметриялы вакуумдық шешімі үшін метрикалық функция $f(r)$ келесідей анықталады:

$$f(r) = 1 - \left(\frac{2M}{r}\right)^2 + \frac{q^4}{r^4} - \frac{\Lambda r^2}{6}. \tag{2.6}$$

мұнда q, M және Λ сәйкесінше жалпы заряд, геометриялық масса және космологиялық тұрақты болып табылады.

2.2 Қара құрдым көкжиегі

Біз Лапс функциясын төмендегідей (2.6) жаза аламыз:

$$f(r) = \frac{\Delta}{r^4}, \tag{2.7}$$

мұнда q, M және Λ берілген мәндері үшін тек қана r-ға тәуелді көкжиек функциясы. Енді сыртқы метриканы (2.4) келесі түрде жаза аламыз:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^4}dt^2 + \frac{r^4}{\Delta}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta (d\phi^2 + \sin^2\phi d\psi^2). \qquad (2.8)$$

Кеңістік-уақыт мәні бойынша нүктеде сингулярлы екені белгілі $r = 0$ және бұл сингулярлықтың табиғаты Λ космологиялық тұрақтылық және q заряд сияқты параметрлерге тәуелді. Бұл екі параметрді де кеңістік-уақыттың кеңістікке ұқсас жалаң сингулярлығынан құтылу үшін таңдауға болады [97]. Метрикалық функция көкжиек функциясының нақты оң нөлдерінде жоғалады, яғни $\Lambda = 0$, келесідей:

$$\Lambda r^6 - 6r^4 + 24M^2 r^2 - 6q^4 = 0. \qquad (2.9)$$

Сонымен нақты оң нольдер Λ осы RN-AdS$_5$ ВН үшін координаталық сингулярлықтарды көрсететін көкжиектің орнын береді. Бір қызығы, теңдеудің алты түрлі түбірі ішіндегі (2.9), тек біреуі оң нақты, ол RN-AdS$_5$ ВН оқиға көкжиегінің радиусын сипаттайды. Бұл жалғыз оң нақты түбір арқылы сандық түрде беріледі:

$$r_+ = \sqrt{\frac{2}{\Lambda} - \frac{24 2^{\frac{1}{3}} M^2}{\mathrm{P}} + \frac{12 2^{\frac{1}{3}}}{\Lambda \mathrm{P}} + \frac{\mathrm{P}}{32^{\frac{1}{3}}\Lambda}}, \qquad (2.10)$$

мұнда

$$\mathrm{P} = \left(432 - 1296M^2\Lambda + 162q^4\Lambda^2 + \sqrt{4(-36 + 72M^2\Lambda)^3 + (432 - 1296M^2\Lambda + 162q^4\Lambda^2)^2}\right)^{\frac{1}{3}}. \qquad (2.11)$$

2.3 Плазмасыз ортадағы бөлшектер қозғалысы

RN-AdS$_5$ ВН көлеңкесінің пішінін табу үшін алдымен ҚҚ-дар айналасындағы фотондар (нөлдік бөлшек) үшін геодезиялық теңдеулерді алу қажет. Симметрия бағыттары негізінен симметриялардың бағыттарына байланысты қозғалыс тұрақтыларын білу арқылы геодезияны іздеу мәселесімен жұмыс істейді. k^μ вектор ретінде $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ симметрия бағытына қарай және $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ аффинді параметрі бар λ қисыққа жанама перпендикуляр бағыт бойымен алайық. Енді Киллинг теңдеуінің көмегімен оны көрсетуге болады:

$$k^\mu u_\mu = const, \qquad (2.12)$$

x^{μ} траектория геодезиялық [90, p. 024073] болғанда метрика коэффициенттері (2.12) уақытқа тәуелсіз болғандықтан, бұл уақыттық Киллинг векторын береді. Сондықтан, теңдеу түрі келесідей болады:

$$k^0 u_0 = u_0 = -E, \tag{2.13}$$

мұнда E-тұрақты бөлшек массасына шаққандағы релятивистік энергия ретінде белгілі. Алдындағы теріс таңбасы тек ыңғайлы болу үшін таңдалған және басқа физикалық мағынасы жоқ. Шын мәнінде, метриканың коэффициенттеріне тәуелсіз, сондықтан бұл ϕ және ψ координаттар басқа симметрия бағыттарын көрсетеді. Демек, $k^{\mu} = (0,0,0,1,0)$ ϕ бағытты таңдау арқылы келесі теңдеу алынды:

$$k^{\mu} u_{\mu} = u_3 = L_{\phi}, \tag{2.14}$$

және $k^{\mu} = (0,0,0,0,1)$ келес*і* ψ бағыт үшін:

$$k^{\mu} u_{\mu} = u_4 = L_{\psi}, \tag{2.15}$$

теңдеу алынды.

Мұндағы L_{ϕ} және L_{ψ} коэффициенттері бөлшектердің массасына шаққандағы бұрыштық импульс ретінде белгілі.

Енді, t және ϕ, ψ бағыттары бойынша геодезиялық теңдеулерді жоғарыдағы қозғалыс тұрақтыларын пайдалану арқылы есептеуге болады:

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{f(r)}, \tag{2.16}$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{L_{\phi}}{r^2 \sin^2\theta}, \tag{2.17}$$

$$\frac{d\psi}{d\lambda} = \frac{L_{\psi}}{r^2 \cos^2\theta}. \tag{2.18}$$

Қалған екі геодезиялық теңдеуді релятивистік Гамильтон-Якоби теңдеуінің көмегімен есептеуге болады:

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \frac{\partial S}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial S}{\partial x^{\sigma}} = 0. \tag{2.19}$$

Енді жоғарыдағы Гамильтон-Якоби теңдеуін шешу үшін [64, p. 35] S түріндегі анзатц алынады

$$S = \frac{1}{2} m_0^2 \lambda - Et + L_\phi \phi + L_\psi \psi + H_r(r) + H_\theta(\theta), \tag{2.20}$$

мұнда $H_r(r)$ және $H_\theta(\theta)$ тек r және θ сәйкесінше функциялары болып табылады. Мұндағы λ және m_0 сәйкесінше сыналатын бөлшектің аффиндік параметрін және тыныштық массасын белгілейміз. (2.19) және (2.20) теңдеулерін қолдану арқылы келесі теңдеу алынады.

$$\left(\frac{\partial H_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + L_\phi^2 \operatorname{ct} g^2\theta + L_\psi^2 \operatorname{t} g^2\theta + \frac{1}{2} m_0^2 - \frac{r^2 E^2}{f(r)} + r^2 f(r)\left(\frac{\partial H_r}{\partial r}\right)^2 + L_\phi^2 + L_\psi^2 = 0. \tag{2.21}$$

Бұл теңдеуді одан әрі жеңілдетсек,

$$\left(\frac{\partial H_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + L_\phi^2 \operatorname{ct} g^2\theta + L_\psi^2 \operatorname{t} g^2\theta + \frac{1}{2} m_0^2 = \frac{r^2 E^2}{f(r)} - r^2 f(r)\left(\frac{\partial H_r}{\partial r}\right)^2 - L_\phi^2 - L_\psi^2 = \mathrm{C} \tag{2.22}$$

мұнда C - Картер тұрақтысы. Келесі қатынасты қолданып,

$$p_\theta = \frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\partial H_\theta}{\partial \theta} \quad \frac{\partial H_\theta}{\partial \theta} = r^2 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda}. \tag{2.23}$$

Фотондар $(m_0 = 0)$ үшін, ковариантты метрика $g^{\mu\nu}$, мәнін орнына қоя отырып, келесі теңдеу алынды:

$$r^2\left(\frac{dr}{d\lambda}\right) = \sqrt{r^4 E^2 - (L^2 + \mathrm{C}) r^2 f(r)} \tag{2.24}$$

$$r^2\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right) = \sqrt{\mathrm{C} - L_\phi^2 \operatorname{ct} g^2\theta - L_\psi^2 \operatorname{t} g^2\theta}, \tag{2.25}$$

мұнда $L^2 = L_\phi^2 + L_\psi^2$

Нөлдік геодезияны анықтау үшін теңдеулердің $m_0 = 0$ мәндерін қойып (2.24) және (2.25) теңдеуіне қою арқылы төмендегі теңдеу алынды:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V(r) = 0 \tag{2.26}$$

мұнда V әсер потенциалы, осыны қолдана отырып келесі теңдеуді аламыз,

$$V(r) = \frac{f(r)}{r^2}\left(\mathrm{C} + L^2\right) - E^2. \tag{2.27}$$

Тұрақсыз дөңгелек орбиталарды табу үшін келесі шарттарды қарастырамыз:

$$V(r)\big|_{r=r_p} = 0, \left.\frac{\partial V(r)}{\partial r}\right|_{r=r_p} = 0. \tag{2.28}$$

Енді $V(r)$ максимум $r = r_p$ шартын аламыз

$$\left.\frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2}\right|_{r=r_p} < 0, \tag{2.29}$$

мұнда r_p фотон сферасының радиусы болып табылады. (2.29), теңдеуді қолдана отырып, келесі шартты аламыз:

$$\frac{r_p^2}{f(r_p)} = \eta + \xi^2, \quad \xi^2 \equiv \xi_1^2 + \xi_2^2 \tag{2.30}$$

мұнда Чандрасехар тұрақтылары η, ξ_1 және ξ_2 нысандары келесі мәндерге ие [64, p. 35-36].

$$\eta = \frac{C}{E^2}, \quad \xi_1 = \frac{L_\phi}{E}, \quad \xi_2 = \frac{L_\psi}{E}. \tag{2.31}$$

Енді (шекаралық) шартты, $\left.\frac{\partial V_{eff}(r)}{\partial r}\right|_{r=r_p} = 0$, ескере отырып

$$r\left.\frac{df(r)}{dr}\right|_{r=r_p} = 2f(r)\big|_{r=r_p}. \tag{2.32}$$

Берілген метрикалық $f(r)$ функция үшін (2.30) шарт (2.28) теңдеуді келесідей түрге келтіреді:

$$r_p^4 - 8M^2 r_p^2 + 3q^4 = 0. \tag{2.33}$$

Бұл теңдеудің шешімі фотон сферасының радиусына келесідей нәтиже береді:

$$r_p = \sqrt{\frac{8M^2 + \sqrt{64M^4 - 12q^4}}{2}}. \tag{2.34}$$

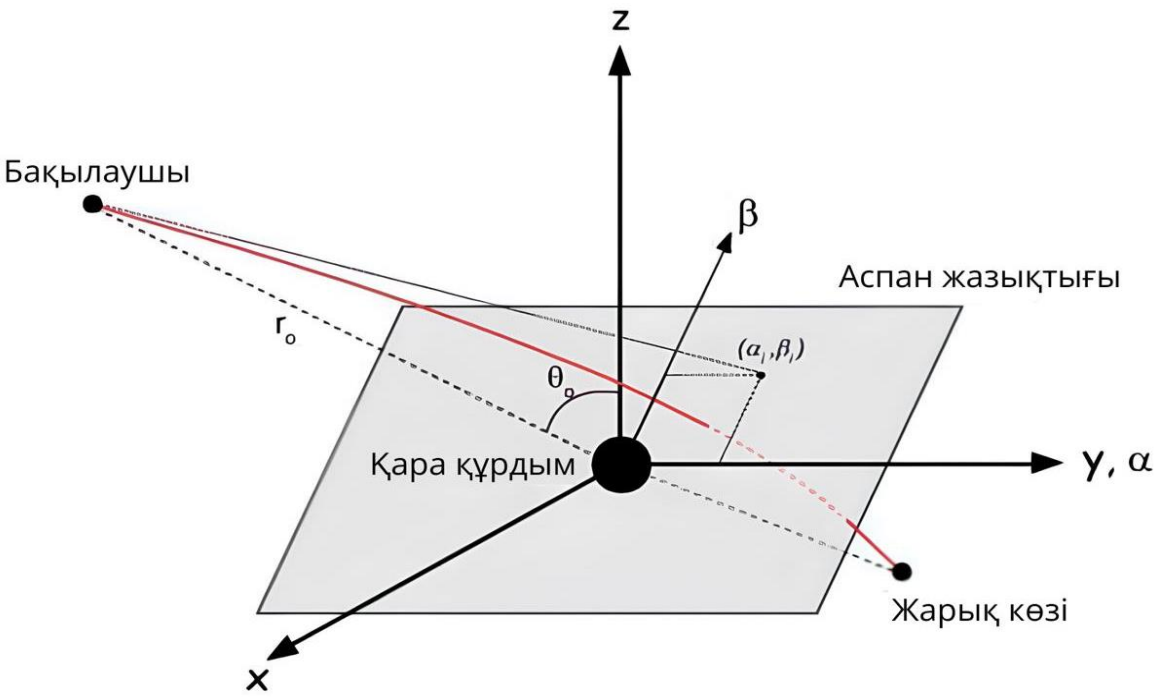
2.4 Қара құрдым көлеңкесін салу

RN-AdS$_5$ ВН көлеңкесін алу үшін 2.1-суретте сызба түрінде аспан координаталарын енгіземіз. Бесөлшемді аспан координаталары төмендегідей анықталады [98]:

$$\alpha = \lim_{r\to\infty}\left(r^2 \sin\theta \frac{d\phi}{dr} + r^2 \cos\theta \frac{d\psi}{dr}\right), \tag{2.35}$$

$$\beta = \lim_{r\to\infty} r^2 \sin\theta \frac{d\theta}{dr}, \tag{2.36}$$

мұнда α құраушы көлеңкенің осьтен (симметрия осі) байқалатын көрінетін перпендикуляр орын ауыстыруын, ал β компонент оның экваторлық бетке проекциясынан байқалатын көлеңкенің көрінетін перпендикуляр орын ауыстыруын білдіреді



Сурет 2.1 – Аспан координаталарының сызбанұсқасы

Ескерту – Әдебиет негізінде құралған [99]

Мұнда r_0 бақылаушы мен ҚҚ арасындағы қашықтық. θ_0 - бұл бақылаушының көкжиегі мен ҚҚ-ның айналу осі арасындағы бұрыш, көлбеу бұрышы деп аталады (2.16) және (2.19) теңдеулерден алынған геодезиялық теңдеулерді пайдалана отырып, $\frac{d\phi}{dr}, \frac{d\psi}{dr}$ және $\frac{d\theta}{dr}$ мәндерін аламыз:

$$\frac{d\phi}{dr}=\frac{L_\phi\cos^2\theta}{r^2\sqrt{E^2-\frac{f(r)}{r^2}\left(\mathsf{C}+L_\phi^2+L_\psi^2\right)}},\tag{2.37}$$

$$\frac{d\psi}{dr}=\frac{L_\phi\sin^2\theta}{r^2\sqrt{E^2-\frac{f(r)}{r^2}\left(\mathsf{C}+L_\phi^2+L_\psi^2\right)}},\tag{2.38}$$

$$\frac{d\theta}{dr}=\frac{1}{r^2}\sqrt{\frac{\mathsf{C}-L_\phi^2\,ctg^2\theta-L_\psi^2\,\mathrm{t}\,g^2\theta}{E^2-\frac{f(r)}{r^2}\left(\mathsf{C}+L_\phi^2+L_\psi^2\right)}}.\tag{2.39}$$

Осы теңдеулерді түрлендіру арқылы және $r\to\infty$ ескере отырып, келесіні теңдеу алынды:

$$\alpha=-\frac{\xi_1\csc\theta+\xi_2\sec\theta}{\sqrt{1+\left(\eta+\xi_1^2+\xi_2^2\right)\Lambda}}\tag{2.40}$$

$$\beta=\pm\sqrt{\frac{\eta-\xi_1^2\,\mathrm{ct}\,g^2\theta-\xi_2^2\,\mathrm{t}\,g^2\theta}{1+\left(\eta+\xi_1^2+\xi_2^2\right)\Lambda}}.\tag{2.41}$$

θ үшін екі түрлі мәнді қарастырайық, яғни $\frac{\pi}{2}$ және $\frac{\pi}{4}$, және де ϕ үшін екі түрлі мәнді қарастырып, 0 және $\frac{\pi}{2}$. (2.35) теңдеуде егер $\theta=\frac{\pi}{4}$, онда $\cos\alpha=1$, егер $\theta=\frac{\pi}{2}$, онда $\csc\theta=1$ және $\csc\phi=1$, $\phi=\frac{\pi}{2}$. Келесі (3.35) теңдеуде $\frac{\pi}{2}$ мәнінде алымдағы бірінші мүшесі сақталады, ал $\theta=0$ екінші мүшесі нөлге кетеді. Осы төрт мәнді ескере отырып, жоғарыдағы аспан координаталары келесідей түрде болады:

$$\alpha=-\frac{\xi}{\sqrt{1+\left(\eta+\xi^2\right)\Lambda}},\tag{2.42}$$

$$\beta=\pm\sqrt{\frac{\eta}{1+\left(\eta+\xi^2\right)\Lambda}}.\tag{2.43}$$

мұнда R_s плазмасыз орта үшін көлеңке радиусын білдіреді

q заряд пен Λ космологиялық тұрақты үшін RN-AdS$_5$ BH көлеңке радиусының және фотон сферасының радиусының сандық мәндері 2.1, 2.2-кестелерде көрсетілген.

Кесте 2.1 – Фотон радиусы r_p және ҚҚ R_s радиусы q заряд, космологиялық тұрақты $\Lambda = 0.0098$ үшін

q	r_p	R_s
0.001	2.82843	3.76177
0.7	2.81228	3.74914
1.2	2.66968	3.64041
1.4	2.47295	3.50224

Кесте 2.2 - $\Lambda = 0.018$ космологиялық тұрақты мәніндегі фотон сферасының r_p радиусы және R_s ҚҚ радиусы q заряд өзгерістері

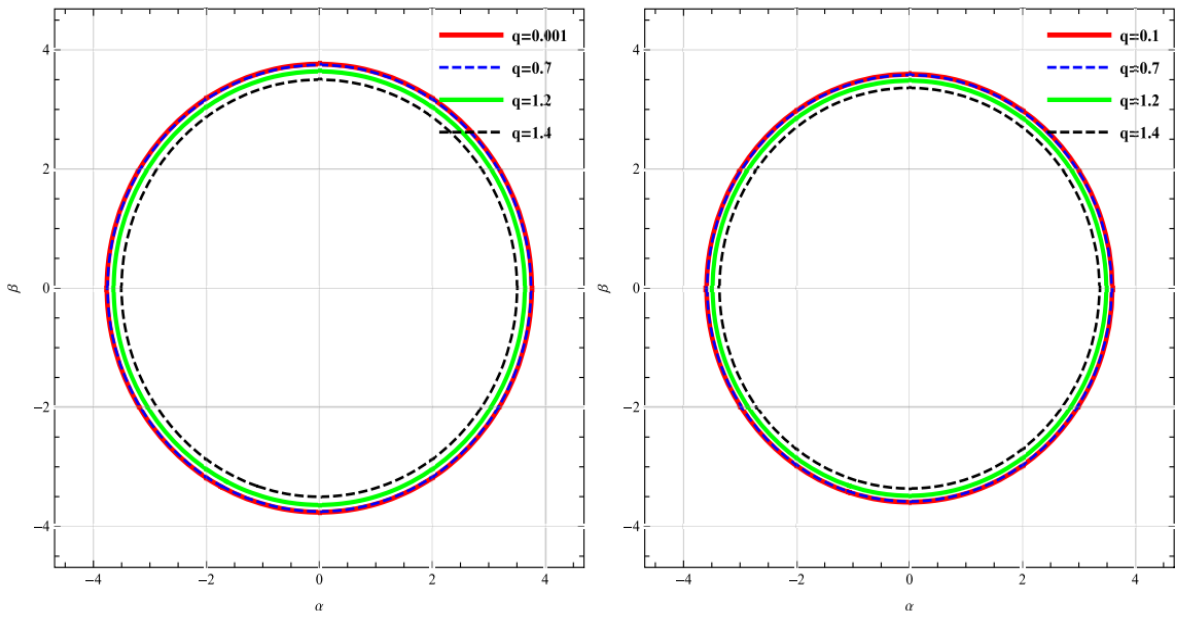
q	r_p	R_s
0.1	2.82842	3.5921
0.7	2.81228	3.5811
1.2	2.66968	3.48599
1.4	2.47295	3.3641

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{\eta + \xi^2}{1 + (\eta + \xi^2)\Lambda} \equiv R_s^2 \qquad (2.44)$$

мұнда R_S плазмасыз орта үшін көлеңке радиусы.

Көлеңке радиусының сандық мәндері мен RN-AdS$_5$ BH фотон сферасының q заряды мен Λ космологиялық тұрақты үшін әр түрлі мәндері 1, 2-кестелерде келтірілген. 1, 2-кестелерден фотонның радиусы мен ҚҚ көлеңкесінің радиусы зарядтың мәнінің ұлғаюымен азаятындығын көреміз.

2.2-суретте әртүрлі заряд мәндері мен космологиялық тұрақтының әртүрлі мәндері ($\Lambda = 0.018$ және $\Lambda = 0.0098$) үшін аспан жазықтығындағы ҚҚ көлеңкесінің өзгеруі графикалық түрде көрсетілген. Мұнда біз ҚҚ көлеңкесінің радиусы q заряд параметрінің және Λ космологиялық тұрақтының кему функциясы екені байқалады.

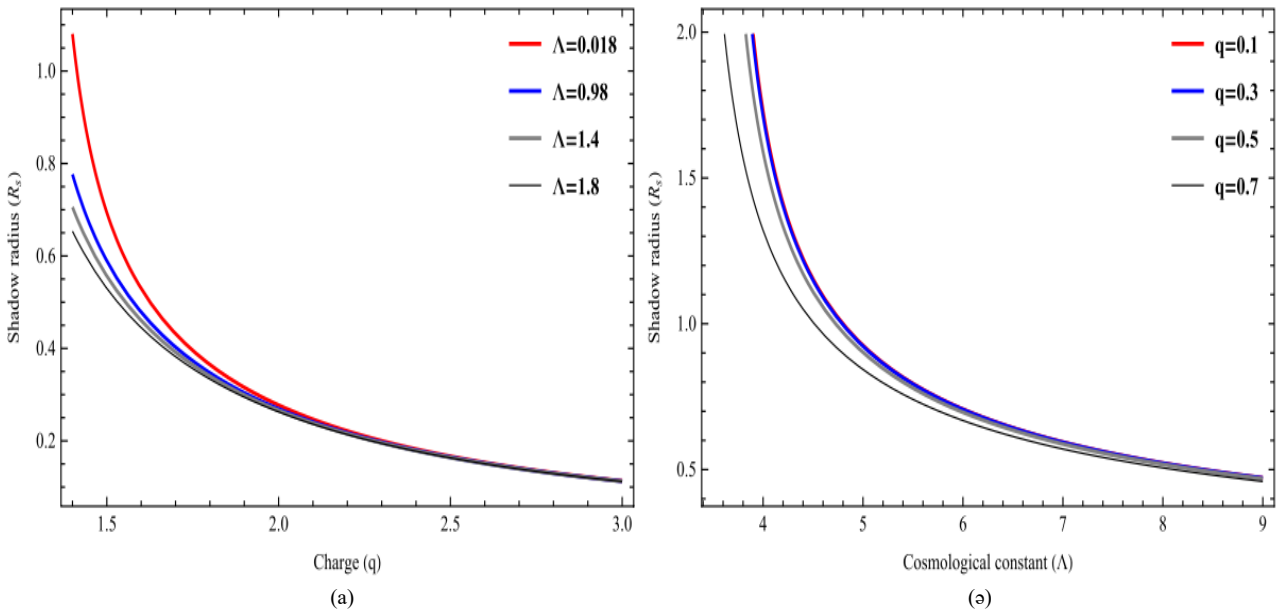


(а) (ә)

Сурет 2.2 – (а)-суретте (α, β) жазықтықтағы q зарядтың өзгеруі бойынша космологиялық $\Lambda = 0.0098$ тұрақтының мәніндегі ҚҚ көлеңкесі, (ә)-суретте α, β жазықтықтағы q зарядтың өзгеруі бойынша космологиялық тұрақтының $\Lambda = 0.018$ мәніндегі ҚҚ көлеңкесі

Ескерту – Әдебиет негізінде құралған [97]

Мұнда біз ҚҚ көлеңкесінің радиусы q заряд параметрінің және космологиялық тұрақтының кему функциясы екені байқалады (2.3-сурет).



Сурет 2.3 – 2.3(а)-суретте ҚҚ радиусының Λ космологиялық тұрақтының әр түрлі мәндеріндегі q зарядқа тәуелді өзгерісі берілген.
2.3(ə)-суретте q заряд әр түрлі мәндеріндегі Λ космологиялық тұрақтының ҚҚ көлеңкесінің радиусына тәуелділігі бейнеленген

Ескерту – Әдебиет негізінде құралған [97]

2.5 Параметрлердің плазмасыз ортадағы көлеңке радиусына әсері

Мұнда плазмасыз орта үшін әртүрлі параметрдің R_s көлеңке радиусына әсері зерттелді. Енді плазмасыз ортадағы көлеңке радиусы келесі пішінді алады:

$$R_s = \sqrt{\frac{\eta + \xi^2}{1 + (\eta + \xi^2)\Lambda}} = \sqrt{\frac{r_p^2}{f(r_p) + \Lambda r_p^2}}. \qquad (2.44)$$

Мұнда келесі (2.28) теңдеуді қарастыра отырып көлеңкенің радиусы ҚҚ-ның Λ космологиялық тұрақтысы, q заряды және M массасы сияқты параметрлерге байланысты екені атап өтіледі. 2.3(а)-суретте көлеңке радиусы фотондық сфераның бекітілген радиусы үшін зарядтың кему функциясы болып табылады. Жоғары мәндерде көлеңке радиусы қисығы күрт төмендейтінін көреміз. Дегенмен, 2.3(ə)-суретте көлеңке радиусы Λ кему функциясы болып табылады және бұл жерде көлеңке радиусы қисығы q заряд параметрінің жоғарылауымен азаяды.

2.6 Плазмалық ортаның қатысуымен түсірілетін көлеңке

Әдетте, ҚҚ ол арқылы өтетін нөлдік бөлшектердің қозғалысы әсер ететін материалдық ортамен қоршалған. Бұл бөлімде RN-AdS$_5$ ВН көлеңкесіне плазмалық ортаның әсері бары айтылады. Плазмалық орта үшін сыну

көрсеткіші $n = n(x^i, \omega)$ белгіленеді, мұндағы ω фотонның бұрыштық жиілігі u^μ жылдамдығы бар алыстағы қозғалатын бақылаушымен өлшенеді. Гамильтониан енді осы $E = \hbar\omega = -p_\alpha u^\alpha$. плазмалық фонмен өзгертілген. Осы ортаның арқасында геодезиялық қозғалыс теңдеулерінде қосымша термин пайда болады, демек, нөлдік парикулалардың траекториялары өзгереді. Плазмалық әсердің арқасында бөлшектің тиімді энергиясы да өзгертіліп, беріледі. Фотонның $n = n(x^i, \omega)$ сыну көрсеткіші мен $E = \hbar\omega = -p_\alpha u^\alpha$ импульсінің арасындағы байланыс берілген [100]:

$$n^2 = 1 + \frac{p_\alpha u^\alpha}{(p_\mu u^\mu)^2}. \tag{2.45}$$

Енді сыну көрсеткіші (n) мен плазмалық жиілік арқылы ω_p өрнектесек [100]:

$$n = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}, \tag{2.46}$$

мұнда ω_p келесі (2.47) формуламен өрнектеледі

$$\omega_p = \frac{4\pi e^2 N}{m_e}. \tag{2.47}$$

мұнда e, N және m_e сәйкесінше q заряд, r-ға тәуелді сан тығыздығы және плазмалық ортадағы электрон массасы. $N(r)$ физикалық формасы (2.40), (2.41) плазмалық ортаның $\frac{N_0}{r^i}$, мұнда i индексі әр түрлі сипаттамалары арқылы анықталады, бірақ $i = 1$, r-ға ең аз тәуелділігі қарастырылды [101-108]. Плазмалық жиіліктегі форманы $N(r)$ және плазма жиілігі мәнін ω_p қойып келесі өрнекті алмастырып, келесі теңдеу алынды [109, 110].

$$\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 = \frac{k}{r}, k = 0.1,\ k \geq 0. \tag{2.48}$$

Демек сыну көрсеткіші n төмендегідей болады

$$n = \sqrt{1 - \frac{k}{r}}. \tag{2.49}$$

Түзетілген Гамильтон-Якоби теңдеуі (2.40) келесідей болады:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \lambda}\right)+\frac{1}{2}\left[g^{\mu\sigma}\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial S}{\partial x^{\sigma}}-\left(n^{2}-1\right)\left(\frac{\partial S}{\partial t}\sqrt{-g^{tt}}\right)^{2}\right]=0. \qquad (2.50)$$

2.7 Плазмалық орта үшін геодезия және қара құрдым көлеңкесі

ҚҚ-ның көлеңкесіне плазмалық ортаның әсерін зерттеу үшін аспан координаттарының жаңа жиынтығы қажет. Зерттеуде геодезиялық сызықтардың модификацияланған теңдеулері қарастырылды. Плазмалық орта үшін нөлдік геодезиялық жиынтық пішінге ие

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{n^{2}E}{f(r)}, \qquad (2.51)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{L_{\phi}}{r^{2}\sin^{2}\theta}, \qquad (2.52)$$

$$\frac{d\psi}{d\lambda} = \frac{L_{\psi}}{r^{2}\cos^{2}\theta}, \qquad (2.53)$$

$$r^{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right) = \pm\sqrt{n^{2}r^{4}E^{2}-\left(L^{2}+\mathrm{C}\right)r^{2}f(r)} \qquad (2.54)$$

$$r^{2}\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right) = \pm\sqrt{\mathrm{C}-L_{\phi}^{2}\cot^{2}\theta-L_{\psi}^{2}\tan^{2}\theta}. \qquad (2.55)$$

Плазмасыз ортадағыдай процедурадан кейін плазмалық ортадағы тиімді радиалды потенциал пайда болады:

$$V^{pl}(r)=\frac{f(r)}{r^{2}}\left(\mathrm{C}+L^{2}\right)-n^{2}E^{2}. \qquad (2.56)$$

Тұрақсыз дөңгелек орбитаны анықтауға болады

$$V^{pl}(r)\Big|_{r=r_{p}^{(pl)}}=0,\ \left.\frac{\partial V^{pl}(r)}{\partial r}\right|_{r=r_{p}^{(pl)}}=0, \qquad (2.57)$$

мұнда $r_{p}^{(pl)}$ плазмалық ортадағы фотон сферасының радиусын білдіреді. Максимизациялау шарты $V^{pl}(r)$ келесідей өрнектеледі:

$$\eta+\xi^{2}=\left.\frac{n^{2}r^{2}}{f}\right|_{r=r_{p}^{(pl)}}, \qquad (2.58)$$

(2.52) теңдеудің бірінші шарты келесі теңдеуді береді:

$$\eta + \xi^2 = \left.\frac{n^2 r^2}{f}\right|_{r=r_p^{(pl)}}, \tag{2.59}$$

Ал екінші шарты:

$$\left(nrf' - 2nf - 2n'rf\right)\Big|_{r=r_p^{(pl)}} = 0. \tag{2.60}$$

Келесі, $f(r)$ (3.6) және $n'(r)$ (2.54) мәндерін(2.55) орындарына қойсақ, фотон сферасының радиусының теңдеуі алынады:

$$\sqrt{1-\frac{k}{r_p}}\left[\frac{4M^2}{r_p^2}-\frac{6q^4}{r_p^4}-2\right]-\frac{k}{r_p\sqrt{1-\frac{k}{r_p}}}\left[1-\frac{4M^2}{r_p^2}+\frac{q^4}{r_p^4}-\frac{\Lambda r_p^2}{6}\right]=0. \quad ((2.61)$$

мұнда (2.56) теңдеудің нақты шешімі мүмкін емес. Сонымен бірге, бұл теңдеуді сандық жолмен шешуге тырысайық. Плазмалық ортаны ескере отырып (2.56) теңдеуге қосымша (k) параметр енгіземіз. Параметрдің екі мәнін алып, атап айтқанда 0.2 және 0.4 сонымен бірге бұл мәндер үшін фотон r_p радиусы (2.56) теңдеуінен сандық шешімдер алынады. Алдыңғыдай амалдарды орындай отырып, $\frac{d\phi}{dr}, \frac{d\psi}{dr}$ $\frac{d\theta}{dr}$ плазмалық орта үшін аспан (α,β) координаталары есептелді:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{L_\phi \csc^2\theta}{r^2\sqrt{n^2E^2 - \frac{f(r)}{r^2}\left(\mathrm{C} + L_\phi^2 + L_\psi^2\right)}}, \tag{2.62}$$

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{r^2}\sqrt{\frac{\mathrm{C} - L_\phi^2 \operatorname{ct}g^2\theta - L_\psi^2 \operatorname{t}g^2\theta}{n^2E^2 - \frac{f(r)}{r^2}\left(\mathrm{C} + L_\phi^2 + L_\psi^2\right)}}. \tag{2.63}$$

Жоғарыда келтірілген мәндерді (α,β) координаталардың өрнектеріне (2.63) қойғанда, келесі өрнек алынды:

$$\alpha = -\frac{\left(\xi_1 \csc\theta + \xi_2 \sec\theta\right)}{\sqrt{1+\left(\eta+\xi_1^2+\xi_2^2\right)\Lambda}} \tag{2.64}$$

$$\beta = \pm\sqrt{\frac{(\eta - \xi_1^2 \operatorname{ct}g^2\theta - \xi_2^2 \operatorname{t}g^2\theta)}{1+(\eta+\xi_1^2+\xi_2^2)\Lambda}} \tag{2.65}$$

θ үшін екі түрлі мәнді қарастырып, $\frac{\pi}{2}$ және $\frac{\pi}{4}$, сонымен бірге ϕ үшін де екі мәнді, 0 және $\frac{\pi}{2}$ мәндерінде (2.59) теңдеуде, егер $\theta = \frac{\pi}{4}$, болса $ctg\theta = 1$, егер $\theta = \phi = \frac{\pi}{2}$, онда $\csc\theta = 1$ және $\csc\varphi = 1$. Келесі (2.60) өрнекте, $\frac{\pi}{2}$ мәнінде алымдағы бірінші мүшесі η-ге, ал екінші мүшесі $\theta = 0$ тең болады:

$$\alpha = -\frac{\xi}{\sqrt{1+\left(\eta+\xi^2\right)\Lambda}}, \tag{2.66}$$

$$\beta = \pm\sqrt{\frac{\eta}{1+\left(\eta+\xi^2\right)\Lambda}}. \tag{2.67}$$

(2.61) және (2.62) теңдеулерден аспан координаталарының мәнін алу үшін келесі теңдеу алынды:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{n^2 r_p^2}{f(r_p) + \Lambda n^2 r_p^2}, \tag{2.68}$$

мұнда $R_s := \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ көлеңке радиусы.

2.3, 2.4, 2.5, 2.6-кестелерде RN-AdS$_5$ ВН әртүрлі q зарядтар мәндері үшін көлеңке радиусы мен фотон сферасының радиусы және плазмалық ортадағы Λ космологиялық тұрақты мәндері көрсетілген. Кестелерден біз плазмалық орта жоқ жағдайдағыдай, заряд мәнінің жоғарылауымен фотон радиусының мәндері төмендейтіндігі көрінді. Алайда, плазмасыз орта жағдайынан айырмашылығы, көлеңке радиусының мәндері зарядтың жоғарылауымен артады.

Кесте 2.3 – q зарядтың, фотон сферасы r_p радиусы және көлеңке R_s радиусының түрлі мәндері үшін, $k = 0.2, \Lambda = 0.018$, $M = 1$

q	r_p	R_s
0.001	2.16013	3.53088
0.3	2.15914	4.54799
0.7	2.12992	4.65152
0.9	2.07101	4.92202

Кесте 2.4 – Фотон сферасының r_p радиусы және ҚҚ көлеңкесінің R_s радиусы, q зарядтың әр түрлі мәндері үшін.Мұнда: $k = 0.2, \Lambda = 0.0098$; $M = 1$

q	r_p	R_s
0.001	2.15986	4.89845
0.5	2.15205	4.93012
0.7	2.12914	5.03282
0.99	2.02265	5.81272

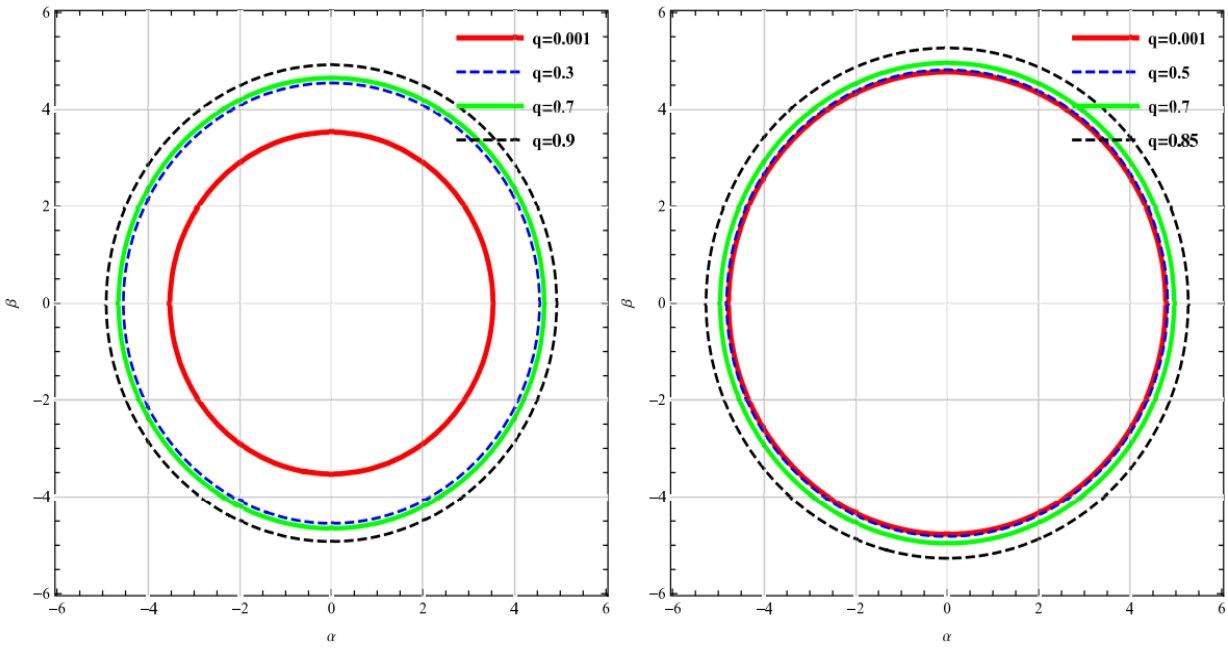
Кесте 2.5 – Фотон сферасының r_p радиусы және ҚҚ R_s радиусы, q зарядтың әр түрлі мәндері үшін. Мұнда: $k = 0.4, \Lambda = 0.018$ және $M = 1$

q	r_p	R_s
0.001	2.11695	4.77481
0.5	2.10887	4.81765
0.7	2.08512	4.95895
0.85	2.0448	5.26797

Кесте 2.6 – Фотон сферасының r_p радиусы және ҚҚ көлеңкесінің R_s радиусы, q зарядтың әр түрлі мәндері үшін.Мұнда: $k = 0.4, \Lambda = 0.0098$ және $M = 1$

q	r_p	R_s
0.01	2.11636	5.18284
0.5	2.10828	5.23775
0.7	2.08453	5.421
0.85	2.04422	5.832258

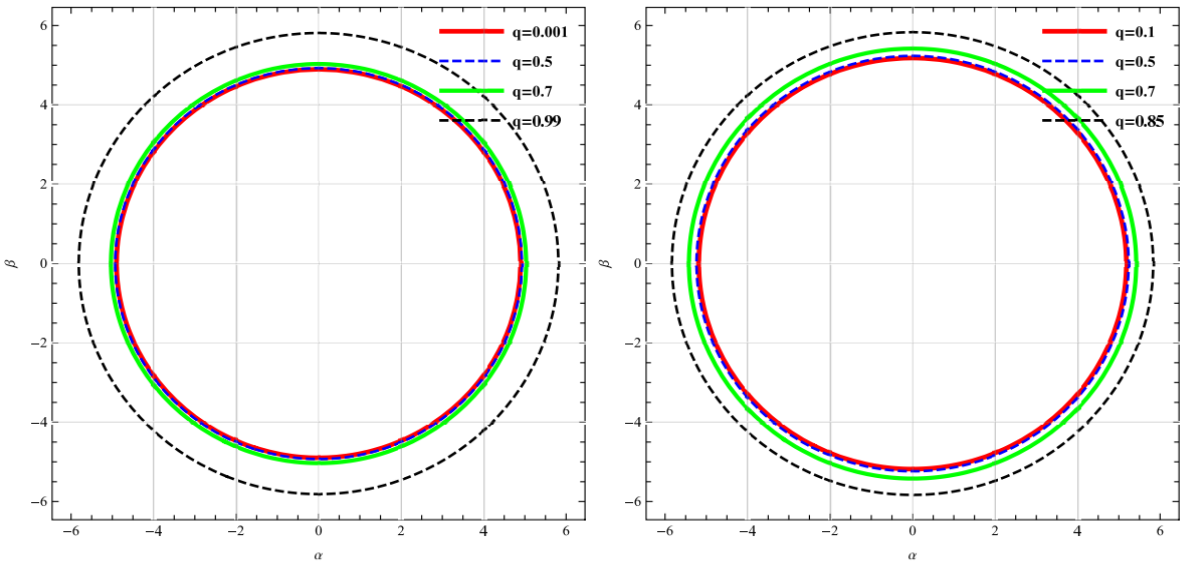
Аспан жазықтығындағы ҚҚ көлеңкесінің q зарядқа тәуелділігі және плазмалық орта үшін космологиялық $\Lambda = 0.018$ тұрақты k плазма параметрлері 2.4-суретте көрсетілген. Көлеңке радиусы фотон сферасының әртүрлі радиустары үшін плазма параметрінің жоғарылауымен өсетінін көруге болады. Сондай-ақ, ҚҚ-ның көлеңке радиусы q заряд параметрінің мәнін жоғарылаған сайын өсетінін байқаймыз. Атап айтқанда, біз плазмалық орта үшін көлеңке радиусы ұлғайған сайын азаятынын анықтадық, бірақ плазмалық ортаның болуы көлеңке радиусының зарядпен жүру үрдісін өзгертеді[97].



(а) (ә)

Сурет 2.4 –2.4(а)-суретте $k=0.2$ мәнінде q зарядтың әр түрлі мәндері үшін (α,β) жазықтықтағы ҚҚ-ның көлеңкесі көрсетілген. 2.4(ә)-суретте $k=0.4$ плазма коэффициентінің мәнінде q зарядтың әр түрлі мәндері үшін (α,β) жазықтықтағы ҚҚ көлеңкесі көрсетілген

Ескерту – Мұнда тұрақты мәндері $\Lambda=0.018$ және $M=1$



(а) (ә)

Сурет 2.5 –2.5(а)-суретте $k=0.2$ мәні үшін q зарядтың әр түрлі мәндері үшін (α,β) жазықтықтағы ҚҚ көлеңкесі көрсетілген. 2.5(ә)-суретте $k=0.4$ мәні үшін q зарядтың әр түрлі (α,β) жазықтықтағы ҚҚ көлеңкесі көрсетілген. Мұнда тұрақтылар: $\Lambda=0.0098$ және $M=1$

Ескерту – Әдебиет негізінде құралған [99]

2.5-суретте ҚҚ көлеңкесінің q зарядқа тәуелділігі және плазмалық орта үшін аспан жазықтығындағы $\Lambda = 0.0098$ космологиялық тұрақтысы бар плазма параметрлері көрсетілген. Көлеңке радиусы плазма k параметрінің ұлғаюымен артады. Фотон сферасының радиусының өзгеруімен параметр 2.5-суреттен ҚҚ көлеңкесінің мөлшері q заряд параметрінің мәніне қарай ұлғаятынын көруге болады.

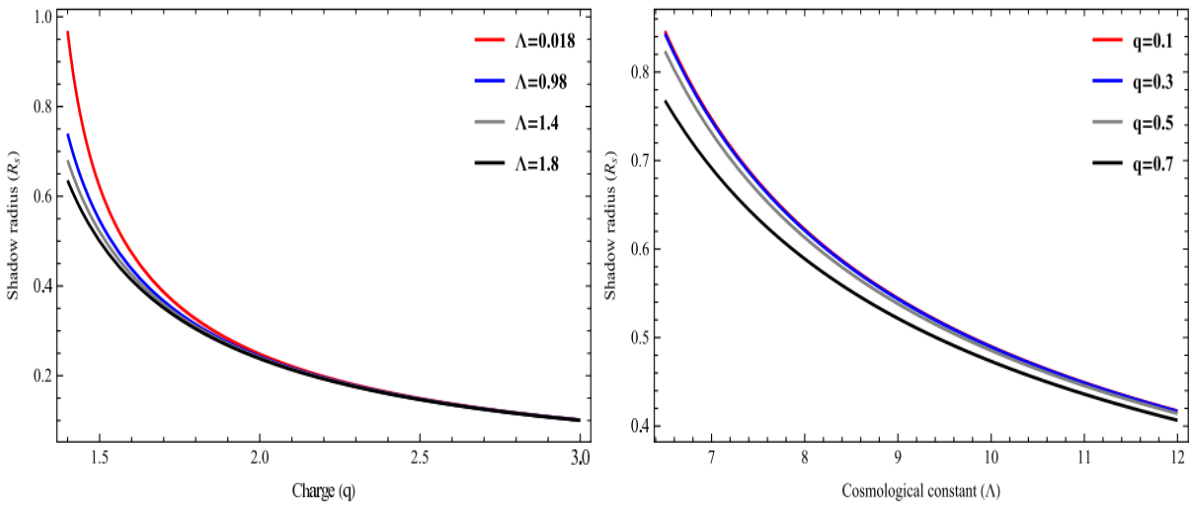
Әрі қарай, біз көлеңке R_s радиусының q заряд және Λ космологиялық тұрақты екі түрлі мәннің k плазма коэффициентіне әсерін талқылаймыз.

2.8 Параметрлердің плазмалық ортадағы көлеңке радиусына әсері

Бұл бөлімде біз плазмалық орта үшін көлеңке радиусына әртүрлі параметрлердің әсерін зерттейміз. Көлеңке радиусы R_s плазмалық орта радиусы арқылы беріледі:

$$R_s = \sqrt{\frac{n^2 r_p^2}{f(r_p) + \Lambda n^2 r_p^2}}. \tag{2.69}$$

Көлеңке радиусы R_s келесі параметрлерге q, k және Λ байланысты екені анық.



(а) (ә)

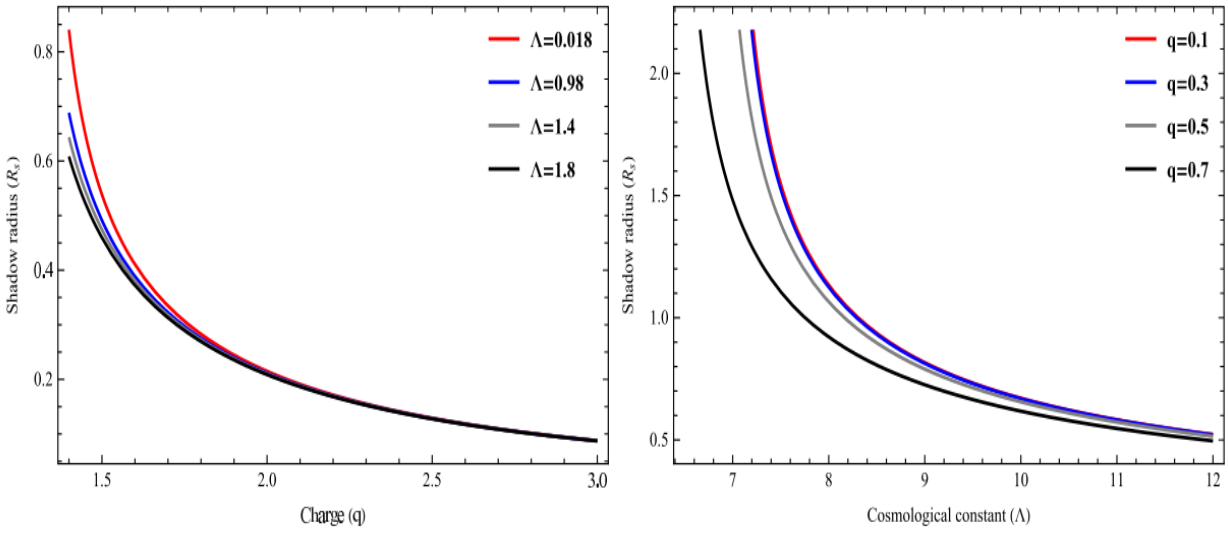
Сурет 2.6 –2.6(а)-суретте Λ космологиялық тұрақтының өзгерісі кезіндегі R_s көлеңке радиусының q зарядқа тәуелділігі көрсетілген. Ал 2.6 (ә)-суретте q заряд өзгерген кезде көлеңке R_s радиусының Λ тәуелділігі көрсетілген.Мұнда $k = 0.2, r_p = 2$ және $M = 1$

Ескерту – Әдебиет негізінде құралған [97]

2.6-суретте, плазмалық ортадағы көлеңке радиусы q заряд және космологиялық тұрақтыға Λ, $k = 0.2$ тәуелді. Мұнда 2.6(а)-суретте көлеңке

радиусы $r_p = 2$ фотон сферасының радиусының белгілі бір мәні үшін зарядтың азаю функциясы болып табылатындығы көрсетілген (біз мұнда тек ыңғайлылық үшін жалпылықты шектемей бекітеміз).

Космологиялық Λ тұрақтының үлкен мәндерінде көлеңке радиусының қисығы күрт азаяды. Дегенмен, 2.6(ә)-сурет графикте көлеңке радиусы тіркелген фотон сферасының радиусы үшін кему функциясы болып табылады. Сонымен қатар, заряд q параметрін арттырғанда көлеңке радиусы қисығы төмендейді.



(а) (ә)

Сурет 2.7 –2.7(а)-суретте Λ космологиялық тұрақтының өзгерісінде R_s көлеңке радиусының q зарядқа тәуелділігі бейнеленген. Ал 2.7(ә)-суретте q зарядтың әр түрлі мәндеріндегі R_s көлеңке радиусының Λ космологиялық тұрақтыға тәуелділігі бейнеленген.Мұнда $k = 0.4, r_p = 2$ және $M = 1$

Ескерту – Әдебиет негізінде құралған [97]

2.6, 2.7-суреттер фотон сферасының бекітілген радиусында R_s көлеңке радиусы плазма параметрінің төмендеу функциясы болып табылады.

2.7-суретте плазмалық орта үшін R_s көлеңке радиусы q заряд және Λ космологиялық тұрақты $k = 0.4$ сияқты параметрлерге қалай тәуелді екендігі көрсетілген. 2.7(а)-суретте көлеңке радиусы Фотон сферасының радиусының бекітілген мәндері q заряд үшін төмендеу функциясы болып табылады. Сондай-ақ, R_s көлеңке радиусының қисығы үлкен мәндерде күрт төмендейтінін көреміз. Алайда, 2.7(ә)-суретте көлеңке радиусы фотон сферасының бекітілген радиусы Λ үшін кему функциясы болып табылады. Сонымен қатар, R_s көлеңке радиусының қисығы q заряд параметрінің өсуімен төмендейді.

2.9 Бақылау бойынша көлеңке радиусы

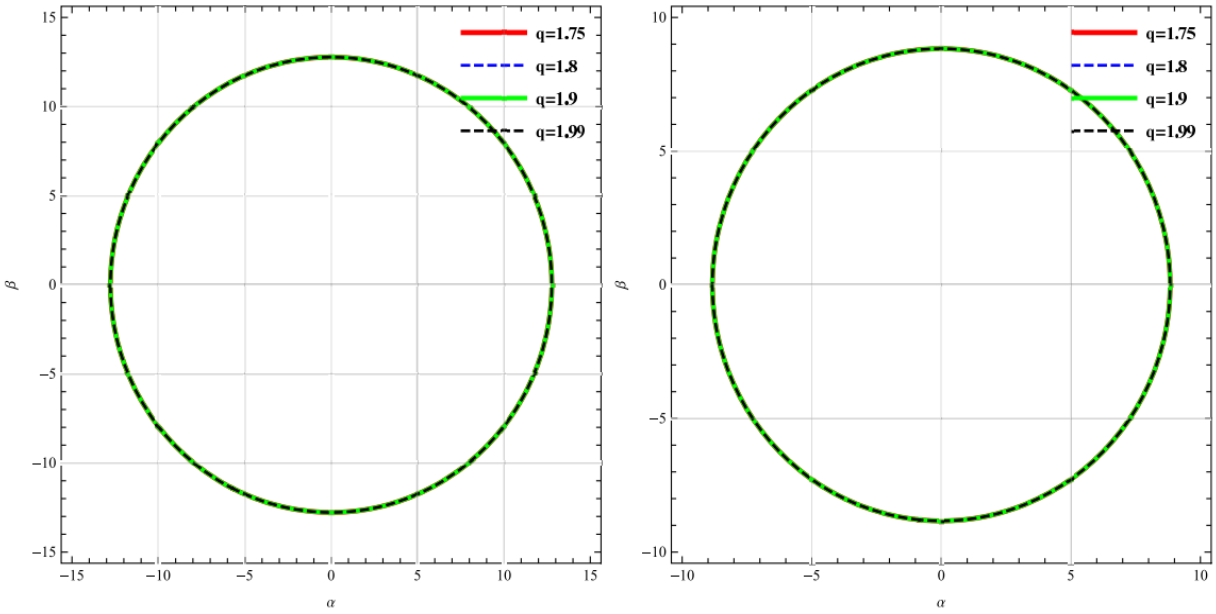
2.7, 2.8-кестелер әртүрлі бақыланатын q заряд мәндері үшін көлеңке радиусы пен фотондық сфера радиусының мәндерін және $M87^*$ плазмасыз ортадағы Λ космологиялық тұрақты мәндерді көрсетеді. Мұнда зарядтың, массаның және үшін шектеулі мәндерде көлеңке радиусы мен фотон сферасының радиусы айтарлықтай өзгермейтіні анықталған.

Кесте 2.7 – $M87^*$ ҚҚ-ы үшін $\Lambda = 0.00735$ мәніндегі r_p фотон сферасының радиусы және R_s ҚҚ көлеңкесінің радиусы және q заряд өзгерісі $\left[M = 6.5\times10^3(\times10^6 M_\oplus)\right]$

q	r_p	R_s
1.75	18384.8	12.7775
1.8	18384.8	12.7775
1.9	18384.8	12.7775
1.99	18384.8	12.7775

Кесте 2.8 – $M87^*$ ҚҚ-ы үшін $\Lambda = 0.0538$ мәніндегі q заряд өзгерісіне фотон сферасының r_p радиусы және ҚҚ көлеңкесінің R_s радиусына тәуелділігі $\left[M = 6.5\times10^3(\times10^6 M_\oplus)\right]$

q	r_p	R_s
1.75	18384.8	8.83309
1.8	18384.8	8.83309
1.9	18384.8	8.83309
1.99	18384.8	8.83309



(а) (ә)

Сурет 2.8 – Әр түрлі q заряд мәндері $\Lambda = 0.01538$ үшін (α, β) жазықтықтағы ҚҚ көлеңкесі көрсетілген

2.8(а)-суретте бақыланатын q заряд мәндерінің және космологиялық тұрақты $M87^*$ ҚҚ-ының плазмасыз ортадағы RN-AdS$_5$ BH көлеңке радиусына әсері көрсетілген [97].

2.8(ә)-суретте q зарядтың әр түрлі мәндері және $\Lambda = 0.00735$ үшін (α, β) жазықтықтағы ҚҚ көлеңкесі көрсетілген. Екі графикте $M87^*$ ҚҚ-ымен шектелген параметрлерге қатысты. Алайда, 2.9, 2.10-кестелерде $Sgr\,A^*$ ҚҚ-нан әр түрлі бақыланатын q заряд мәндері үшін көлеңке радиусы пен фотон сферасының радиусы және плазмасыз ортадағы Λ космологиялық тұрақты мәндері көрсетілген. Мұнда да, $M87^*$ ҚҚ сияқты, шектеулі параметр мәндері фотон радиусы мен көлеңке радиусын айтарлықтай өзгертпейді.

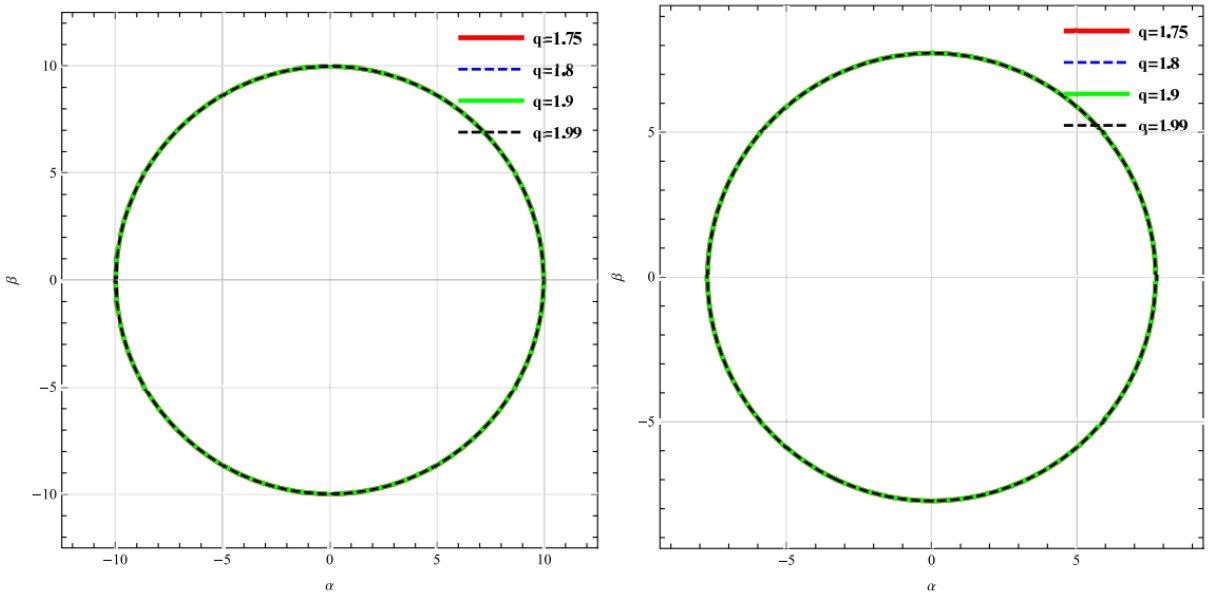
Кесте 2.9 – $SgrA^*$ ҚҚ үшін $\Lambda = 0.00735$ q зарядтың өзгерісі кезіндегі ҚҚ көлеңкесінің R_s радиусы, фотон r_p радиусы $[M = 4.0(\times 10^6 M_\oplus)]$

q	r_p	R_s
1.75	11.304	9.98218
1.8	11.304	9.98191
1.9	11.304	9.98131
1.99	11.304	9.98068

Кесте 2.10 – $SgrA^*$ ҚҚ үшін r_p фотон сферасының радиусы және ҚҚ көлеңкесінің R_s радиусы, $\Lambda = 0.01538$ q заряд өзгерісі кезінде $[M = 4.0(\times 10^6 M_\oplus)]$

q	r_p	R_s
1.75	11.304	7.73189
1.8	11.304	7.73177
1.9	11.304	7.73149
1.99	11.304	7.73119

2.9-суретте бақыланатын заряд мәндерінің және космологиялық тұрақтының плазмасыз ортадағы $Sgr\,A^*$ RN-AdS$_5$ BH көлеңкесі радиусына әсері көрсетілген.



(а) (ә)

Сурет 2.9 – 2.9(а) -суретте q зарядтың өзгерісі кезіндегі $\Lambda = 0.00735$ мәні бойынша (α, β) –жазықтықтағы ҚҚ көлеңкесі бейнесі көрсетілген. 2.9(ә) - суретте q зарядтың өзгерісі кезіндегі $\Lambda = 0.01538$ мәні бойынша (α, β) - жазықтықтағы ҚҚ көлеңкесінің бейнесі көрсетілген

Ескерту – Екі график те $Sgr\,A^*$ ҚҚ-мен шектелген параметрлерге қатысты

2.11, 2.12, 2.13-кестелерде әр түрлі бақыланатын q заряд мәндері үшін көлеңке радиусы мен фотон сферасының радиусы және плазмалық параметрлері бар плазмалық ортадағы $M87^*$ ҚҚ үшін Λ космологиялық тұрақты мәндер $k = 0.2$ және $k = 0.4$ көрсетілген. Мұнда плазмалық ортадағы ҚҚ-ның шектеулі параметрлері көлеңке радиусына және фотон сферасының радиусына айтарлықтай әсер етпейтіні байқалады.

Кесте 2.11 – $M87^*$ ҚҚ үшін q зарядтың өзгерісі кезіндегі $\Lambda = 0.00735$ және $k = 0.4$ мәні бойынша фотон сферасының r_p радиусы және ҚҚ көлеңкесінің R_s радиусы $\left[M = 6.5 \times 10^3 (\times 10^6 M_\oplus)\right]$

q	r_p	R_s
1.75	0.15	9.49×10^{-7}
1.8	0.15	9.49×10^{-7}
1.9	0.15	9.49×10^{-7}
1.99	0.15	9.49×10^{-7}

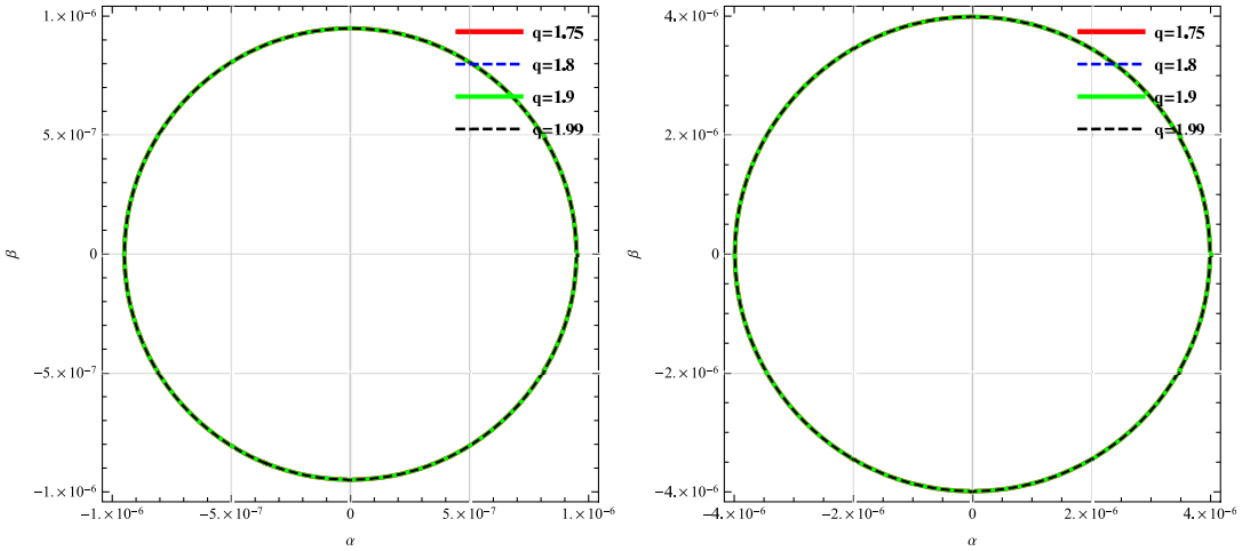
Кесте 2.12 – $M87^*$ ҚҚ үшін q зарядтың өзгерісі кезіндегі $\Lambda = 0.00735$ және $k = 0.4$ мәні бойынша фотон сферасының r_p радиусы және ҚҚ көлеңкесінің R_s радиусы $\left[M = 6.5 \times 10^3 (\times 10^6 M_\oplus)\right]$

q	r_p	R_s
1.75	0.3	3.99×10^{-6}
1.8	0.3	3.99×10^{-6}
1.9	0.3	3.99×10^{-6}
1.99	0.3	3.99×10^{-6}

Кесте 2.13 – $M87^*$ ҚҚ үшін q зарядтың өзгерісі кезіндегі $\Lambda = 0.01538$ және $k = 0.2$ мәні бойынша фотон сферасының r_p радиусы және ҚҚ көлеңкесінің R_s радиусы $\left[M = 6.5 \times 10^3 (\times 10^6 M_\oplus)\right]$

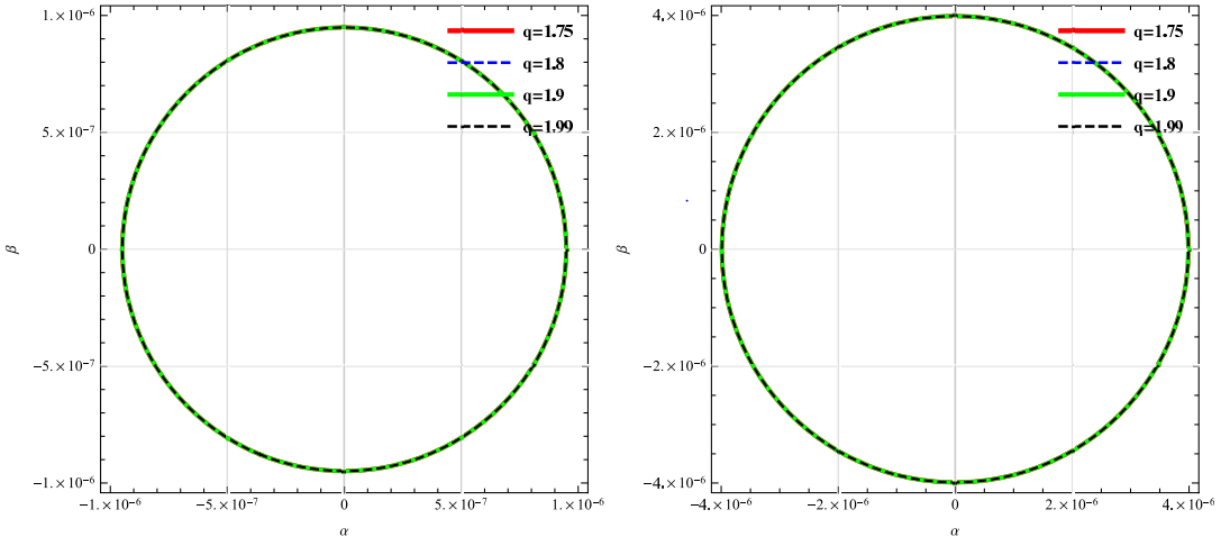
q	r_p	R_s
1.75	0.15	9.49×10^{-7}
1.8	0.15	9.49×10^{-7}
1.9	0.15	9.49×10^{-7}
1.99	0.15	9.49×10^{-7}

2.10-суретте бақыланатын заряд мәндерінің және космологиялық тұрақты $M87^*$ ҚҚ-ының плазмалық ортадағы RN-AdS_5 ВН көлеңке радиусына әсері көрсетілген.



(а) (ә)

Сурет 2.10 – q зарядтың әр түрлі мәндері $\Lambda = 0.00735$ және $k = 0.2$ үшін $\alpha\beta$ жазықтықтағы ҚҚ көлеңкесі бейнеленген. 2.10(а)-суретте q зарядтың әр түрлі мәндері $\Lambda = 0.01538$ және $k = 0.4$ үшін (α, β) жазықтықтағы ҚҚ көлеңкесі бейнеленген. 2.10(ә)-суретте q зарядтың әр түрлі мәндері $\Lambda = 0.01538$ және $k = 0.4$ үшін (α, β) жазықтықтағы ҚҚ көлеңкесі бейнеленген. Парақ 1



(б) (в)

Сурет 2.10, парақ 2

Ескерту – Әдебиет негізінде құралған [97]

Алайда, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17-кестелер ҚҚ көлеңке радиусымен фотон сферасының радиусының мәндерін әр түрлі бақыланатын q заряд мәндері үшін және плазмалық ортадағы космологиялық Λ тұрақты, плазмалық параметрі X және X $Sgr\,A^*$ ҚҚ үшін сипаттайды. Осы кестелерден h жағдайынан айырмашылығы, плазмалық ортадағы параметрлерінің шектеулі мәндері фотон

радиусына және $M87^*$ ҚҚ көлеңке радиусына айтарлықтай әсер ететіндігі анықталды.

Кесте 2.14 – $Sgr\,A^*$ ҚҚ үшін q зарядтың өзгермелі мәні кезіндегі, $\Lambda = 0.00735$ және $k = 0.2$ фотон радиусы r_p және ҚҚ R_s көлеңкесінің радиусы $\left[M = 4.0(\times 10^6 M_\oplus)\right]$

q	r_p	R_s
1.75	7.98859	12.8199
1.8	7.98533	12.8251
1.9	7.97791	12.8501
1.99	7.97012	12.8725

Кесте 2.15 – $Sgr\,A^*$ ҚҚ үшін q зарядтың өзгерісі кезіндегі $\Lambda = 0.00735$ және $k = 0.4$ мәні бойынша фотон r_p радиусы және ҚҚ көлеңкесінің R_s радиусы $\left[M = 4.0(\times 10^6 M_\oplus)\right]$

q	r_p	R_s
1.75	7.94032	13.0773
1.8	7.937	13.0881
1.9	7.92945	13.1128
1.99	7.92151	13.1392

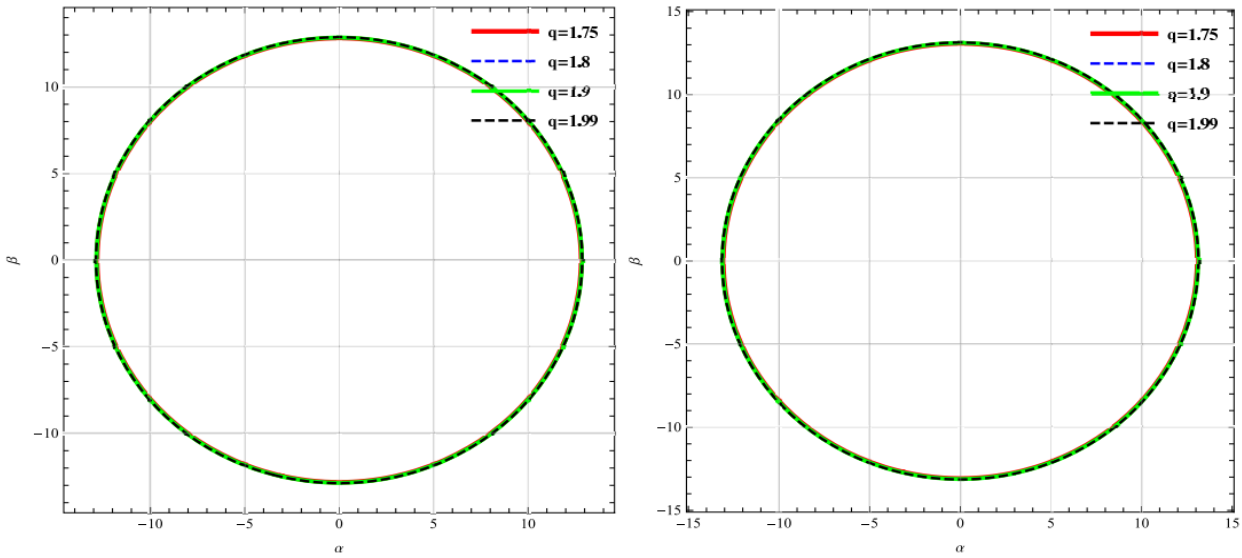
Кесте 2.16 – $Sgr\,A^*$ ҚҚ үшін q зарядтың өзгерісі кезіндегі $\Lambda = 0.01538$ және $k = 0.2$ мәні бойынша фотон сферасының r_p радиусы және ҚҚ көлеңкесінің R_s радиусы $\left[M = 4.0(\times 10^6 M_\oplus)\right]$

q	r_p	R_s
1.75	7.99292	8.85291
1.8	7.98966	8.85593
1.9	7.98224	8.86284
1.99	7.97444	8.87017

Кесте 2.17 – $Sgr\,A^*$ ҚҚ үшін q зарядтың өзгерісі кезіндегі $k = 0.4, \Lambda = 0.01538$ мәні бойынша фотон r_p сферасының радиусы және ҚҚ көлеңкесінің R_s радиусы $\left[M = 4.0(\times 10^6 M_\oplus)\right]$

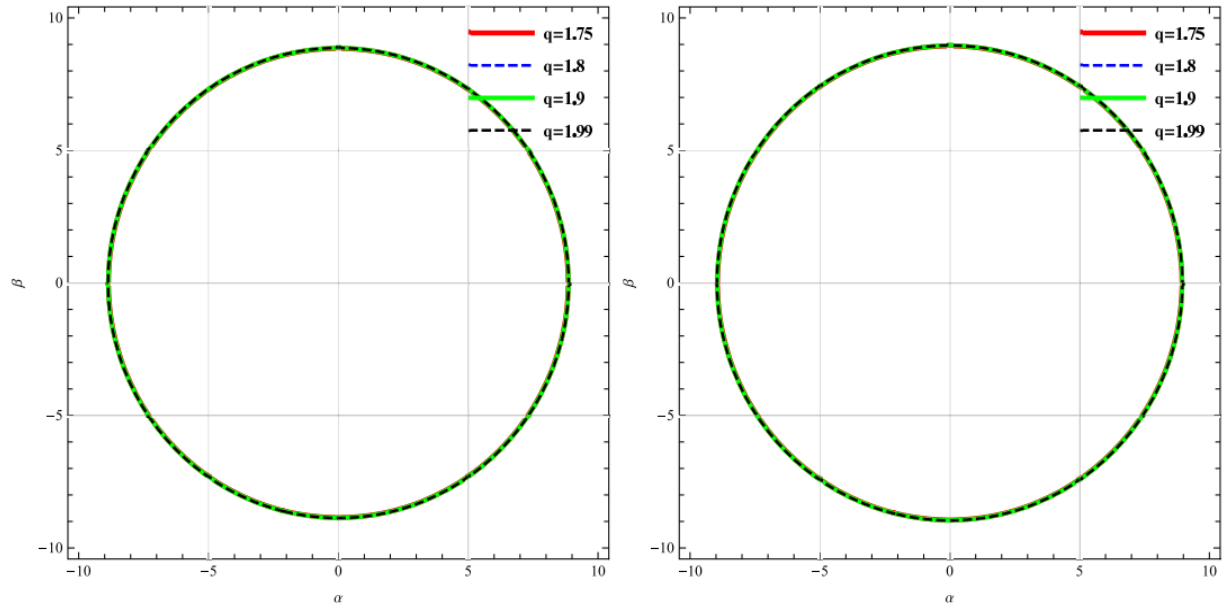
q	r_p	R_s
1.75	7.94906	8.94223
1.8	7.9574	8.94565
1.9	7.93819	8.9535
1.99	7.93025	8.96184

2.11-суретте плазмалық ортадағы $Sgr\,A^*$ RN-AdS$_5$ ВН көлеңкесінің R_s радиусына ҚҚ q зарядының және Λ космологиялық тұрақтының байқалған мәндерінің әсері көрсетілген.



(а) (ә)

Сурет 2.11 – q зарядтың өзгерісі кезінде $k = 0.2, \Lambda = 0.00735$ мәндерінде (α, β)-жазықтығындағы ҚҚ-ның көлеңкесі бейнеленген. 2.11(а)-суретте q зарядтың өзгерісі кезінде $\Lambda = 0.00735$ және $k = 0.4$ мәндерінде (α, β) жазықтығындағы ҚҚ-ның көлеңкесі бейнеленген. 2.11(ә)-суретте q зарядтың өзгерісі кезінде $k = 0.2, \Lambda = 0.01538$ мәндерінде (α, β) жазықтығындағы ҚҚ көлеңкесі бейнеленген, парақ 1



(б) (в)

Сурет 2.11, парақ 2

2.11(в)-суретте q зарядтың өзгерісі кезінде және $k = 0.4, \Lambda = 0.01538$ мәндерінде (α, β) жазықтығындағы ҚҚ-ның көлеңкесі бейнеленген. Екі график те $SgrA^*$ ҚҚ-мен шектелген параметрлерге қатысты.

Ескерту – Әдебиет негізінде құралған [97]

2.10 Энергия шығару жылдамдығы

Бұл бөлімде RN-AdS$_5$ ВН энергия шығару жылдамдығы зерттелді. Энергияның шығару жылдамдығын келесідей көрсетуге болады [102, p. 198-205; 103, p. 2050163; 104, p. 25-47; 105, p. 180-180-14]:

$$\frac{d^2}{d\omega dt}Z(\omega)=\frac{2\pi^2\sigma_{lim}}{\exp\left(\frac{\omega}{T_H}\right)-1}\omega^3, \tag{2.70}$$

мұнда $Z(\omega), T_H$ және ω - энергия, Хокинг температурасы және сәйкесінше ҚҚ-ның сәуле шығару жиілігі. Мұнда қарастырылып отырған сфералық симметриялы ҚҚ үшін оның фотон сферасының геометриялық қимасына сәйкес келетін шекті $\sigma_{\lim}$ тұрақты берілген. Хокинг температурасын келесідей есептеуге болады [107, p. 136025]:

$$T_H=\frac{f'(r)}{4\pi}\bigg|_{r=r_+}=\frac{2M^2}{\pi r_+^3}-\frac{q^4}{\pi r_+^5}-\frac{\Lambda r_+}{12\pi}, \tag{2.71}$$

мұнда r_+ – RN-AdS$_5$ ВН оқиға көкжиегінің радиусы болып табылады.

Бесөлшемді ҚҚ үшін $\sigma_{\lim}$шаманы келесідей жазуға болады [106, p. 127-136; 107, p. 136025; 108, p. 498-500]:

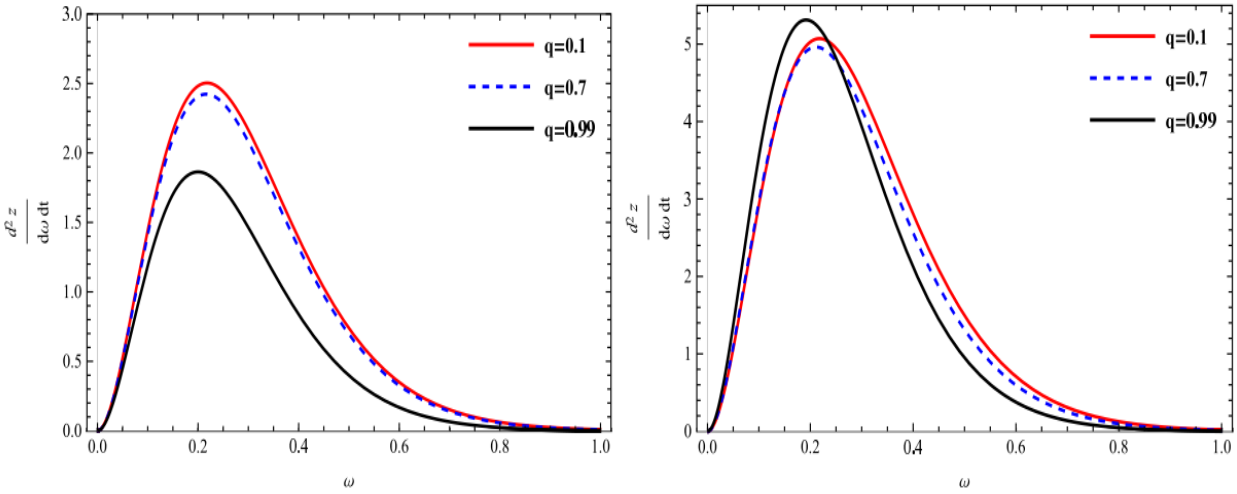
$$\sigma_{lim}=\frac{4\pi R_s^3}{3}. \tag{2.72}$$

Содан кейін энергияның бөліну жылдамдығын келесідей қайта жазуға болады:

$$\frac{d^2}{d\omega dt}Z(\omega)=\frac{8\pi^3R_s^3}{3\left(\exp\left(\frac{\omega}{T_H}\right)-1\right)}\omega^3. \tag{2.73}$$

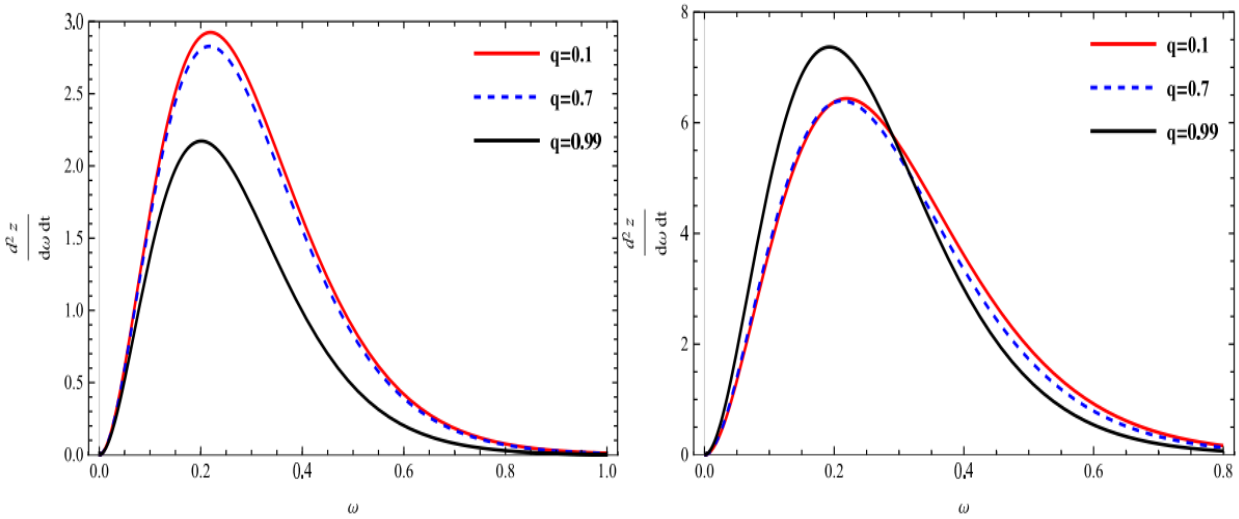
Төменде энергия шығару жылдамдығының сипаттамасын зерттеу үшін графиктер құрамыз. 2.12-суретте q зарядтың өзгеру ω жиілігіне, плазманың бекітілген параметрінде фотон сферасының радиусының өзгеруіне байланысты энергияның сәулелену жылдамдығының әсері көрсетілген. Плазмасыз ортадан айырмашылығы, энергияның бөліну жылдамдығы $\frac{d^2}{d\omega dt}Z(\omega)$ плазмалық ортаның зарядының мәні жоғарыласа артады. Плазмалық k параметрдің болуы энергияның бөліну жылдамдығын арттырады. Алайда, q зарядтың плазманың бекітілген $k=0,0.2$ параметріндегі фотон сферасының радиусының өзгеруіне

байланысты энергияның сәулелену ω жылдамдығының әсері 2.13-суретте көрсетілген.



(а) (ә)

Сурет 2.12 – q заряд және R_p фотон сферасының радиусы өзгерген кезде энергияның сәулелену жылдамдығының жиілікке тәуелділігі көрсетілген. 2.12 (а)-суретте $k = 0, \Lambda = 0.018$ тұрақтылар алынды, 2.12(ә)-суретте $k = 0.2, \Lambda = 0.018$ алынды, 2.12(б)-суретте $k = 0, \Lambda = 0.098$ алынды және 2.12(в)-суретте $k = 0.2, \Lambda = 0.0098$ алынды

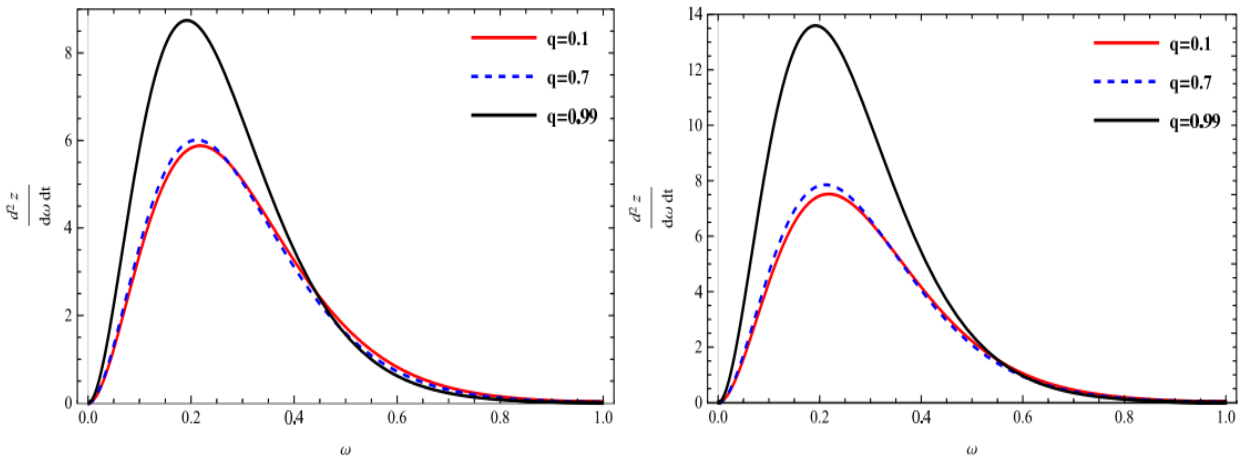


(б) (в)

Сурет 2.12, парақ 2

Ескерту – M=1

Λ космологиялық тұрақты өзгерген кезде R_s көлеңке радиусының q зарядқа тәуелділігі. Ал 2.7(в)-суретте q заряд өзгерген кезде $\Lambda - R_s$ тәуелділігі көрсетілген. Мұнда $k = 0.4, r_p = 2$ және $M = 1$.



(а) (ә)

Сурет 2.13 – q заряд өзгерген кезде және R_p фотон сферасының радиусы өзгерген кезде энергияның сәулелену жылдамдығының жиілікке тәуелділігі келтірілген. 2.13(а)-суретте $k = 0.4, \quad \Lambda = 0.018$, 2.13(ә)-суретте $k = 0.4, \quad \Lambda = 0.0098$

Ескерту – Екі жағдайда да M=1

Сонымен осы тарауда шексіз қашықтағы бақылаушы үшін RN-AdS$_5$ ВН көлеңкесі зерттелді. Алдымен Гамильтон-Якоби теңдеуін пайдаланып нөлдік геодезиялық теңдеулер есептелді. Тұрақсыз дөңгелек орбитаның шекаралық шартын қолдана отырып, біз фотон сферасының радиусы анықталды. Нөлдік геодезияны қолдана отырып, көлеңке радиусын беретін координаттар (α, β) алынды. Кестеге әртүрлі сандық көрсеткіштерді келтіре отырып, әр түрлі заряд үшін фрадиусы мен көлеңке радиусының мәндері қойылды. Сондай-ақ әр түрлі зарядтар үшін αβ-жазықтықтағы ҚҚ көлеңкесіне графикалық талдау жасалды.

Графиктерде заряд параметрінің де, космологиялық тұрақтының да мәндері жоғарылаған сайын ҚҚ-ның көлеңке радиусы азаятыны көрсетілген. Сондай-ақ көлеңке радиусы ҚҚ-ның массасына байланысты екені анықталды. Көлеңке радиусының осы параметрлерге тәуелділігін тексеру үшін біз графиктік талдау жасадық және көлеңке радиусы фотон сферасының бекітілген радиусы үшін зарядтың азаю функциясы екені байқалады.

Содан кейін нөлдік бөлшектердің (фотондардың) тұрақсыз дөңгелек орбиталарына әсерін зерттеу үшін плазмалық орта енгізілді. Көлеңке радиусы фотон сферасының радиусы өзгерген кезде k плазма параметрінің өзгеруімен жоғарылайтыны байқалады. Плазмалы ортадағы көлеңкелі сәулелену плазманың параметріне байланысты. Біз сондай-ақ көлеңке радиусына әртүрлі параметрлердің әсерін көрсететін плазмалық орта үшін графикалық талдау жасалды. соңында 5D RH AdS ҚҚ энергия шығару жылдамдығы зерттеліп және жиілікке байланысты энергияның сәулелену жылдамдығына графиктік талдау жасалды.

3 ЭЙНШТЕЙН-ГАУСС-БОННЕ ГРАВИТАЦИЯСЫНДАҒЫ БАРДИННІҢ ҚАРА ҚҰРДЫМЫ

Бұл тарауда AdS кеңістіктегі бейсызықтық электродинамикамен біріккен ЭГБ гравитациясы үшін Бардиннің ҚҚ-ының шешімін алдық. Көкжиек құрылымын сандық талдау екі: Коши және оқиға көкжиегінің болуын болжайды. Сондай-ақ, термодинамиканың модификацияланған бірінші заңын қанағаттандыратын осы ҚҚ-ның жылулық қасиеттері қарастырылды. Сонымен қатар, ҚҚ-ның жергілікті және жаһандық тұрақтылығы талдалады. $P-v$ шекті және фазалық ауысу да талқыланады. Осы модельдің шекті көрсеткіштері орта өріс теориясына дәл сәйкес келеді.

ЖСТ гравитацияның толық теориясы емес, өйткені бұл көптеген ғаламдық ұғымдарды түсіндіре алмайды. Мысалы, бұл бірінші принциптен КМ мен КЭ ұғымын түсіндіре алмайды. Әртүрлі контексттерде гравитация теориясы модификацияны қажет етеді және ғалымдар оны сәйкесінше өзгертуде. Дегенмен, ЖСТ-ның толық нұсқасы жоқ. Лавлок гравитациясы [107, p. 136025; 108, p. 498-500; 109, p. 874-875] гравитация теориясының өзгертілген теорияларының бірі болып табылады, ол негізінен жоғары өлшемдердегі гравитацияның жоғары туындысына баса назар аударады. Жақында космологияда модификацияланған гравитацияның соңғы даму жетістіктері қарастырылды [110, p. 3696-3707].

Лавлоктың гравитациясының маңыздылығы бұл *D*-өлшемдерінде екінші ретті қозғалыс теңдеулерін беретін ең жалпы ЖСТ теориясы. ГБ немесе ЭГБ гравитациясы-бұл Лавлоктың жоғары өлшемдегі гравитациясының ерекше түрі, ол табиғи түрде ішектер теориясының төмен энергетикалық тиімді әсерінде көрінеді [111, 112].

Жақында төрт өлшемді массивті AdS ГБ гравитациясының ҚҚ-ының шешімі алынды [113]. Алайда, Янг-Миллс өрісі бар ЭГБ AdS 4D ҚҚ-ының шешімі келесі сілтемеден табылды [114].

Бұл бөлімде бейсызықтық бастапқы мүшесі бар бесөлшемді ГБ гравитациясы үшін ҚҚ шешімі алынды. Сахаров пен Глинер [115, 116] де-Ситтердің ядросы $P=-\rho$ күй теңдеуімен немесе $T_{ab}=\Lambda g_{ab}$ дұрыс қамтамасыз ете алатын сингулярлы емес шешімді алу үшін қажет тәсіл гравитациялық күйреудің соңғы кезеңін сипаттау үшін болжам жасады.Осы идеяға сүйене отырып, Бардин [117] алғашқы тұрақты ҚҚ-ды жасады, ал 30 жылдан кейін Ayon-Beato мен Gracia бейсызықтық электродинамикаға қатысты нақты шешім тапты [118-121]. Кейіннен тұрақты ҚҚ-дарға арналған көптеген шешімдер қабылданды. Алайда, бұл шешімнің көп бөлігі Бардиннің ұсынысына негізделген [122-138]. ЭГБ гравитациясындағы тұрақты ҚҚ-ның [139-141], төрт өлшемді гравитациялық ЭГБ гравитациясының [142-146], массивтік гравитацияның [147] жалпылаулары берілген. Newman Janis алгоритмін қолдана отырып, [148, 149] айналмалы ҚҚ үшін аналог ұсынылды [150-152]. Жақында ЭГБ гравитация инфляциялық теория аясында ықшамдалды, ол жарық жылдамдығына тең гравитациялық толқындар мәселесін шешуге көмектеседі [153, 154]. Ықшам нысандар (жұлдыздар) және бастапқы

гравитациялық толқындар [155] ГБ гравитациясы үшін де зерттелуде. ҚҚ-дардың жылулық қасиеттері жылдар бойы қызығушылық тудырды [156]. ҚҚ-дар тек температурамен немесе энтропиямен ғана сипатталмайды, олар фазалық құрылымға ие және шектік құбылыстарға мүмкіндік береді. [157-161]. Шындығында, фазалық ауысу кеңейтілген кеңістіктегі ҚҚ қасиеттерін зерттеуде маңызды. Хокинг пен Пейдж AdS ҚҚ-ы мен термиялық AdS арасындағы алғашқы фазалық ауысуды зерттеді [162]. Виттен құпиялылық/деконфайнт фазасын талдады [163], ал Чамблин AdS зарядталған ҚҚ-ы Ван-дер-Ваальстің фазалық ауысуын зерттеді [164]. Әр түрлі ҚҚ-дардың кеңейтілген термодинамикасы әр түрлі ҚҚ-дар үшін зерттелуде [165, 166], ал $P-V$ шектілігі ФРУ кеңістігі үшін және фазалық ауысуы да талқыланды[167-176]. Келесі жұмыста жоғары туындылы нүктелік көзі бар Ли-Виктің гравитациясының айналмалы аналогы үшін сингулярлық шешімнің термодинамикасы келтірілген [177, 178]. Термодинамикалық шамалар ҚҚ-дарды сипаттайды. ҚҚ-дар тек температурамен немесе энтропиямен ғана емес, сонымен қатар фазалық құрылымдарға ие және сыни құбылыстарды көрсетеді. Фазалық ауысу кенейтілген кеңістікте ҚҚ-ның қасиеттерін зерттеуде маңызды. Бұл тарауда ЭГБ гравитациясындағы Бардиннің AdS ҚҚ-ының шешімін алып, көкжиектердің құрылымы мен орналасуы бар бейсызықтық электродинамикамен біріктірілген гравитациялық ЭГБ теңдеулері алынды[179]. Тұрақты массивті бесөлшемді ЭГБ ҚҚ-ның термодинамикалық қасиеттерін зерттеу осы бөлімнің негізгі мәселесі болып табылады. Мұнда табиғи $8\pi G = c = 1$ бірліктері бар метрикалық $(-,+,+,+,+)$ қолтаңба қолданылады [180, 181].

3.1 Эйнштейн-Гаусс-Бонне гравитациясындағы қара құрдым шешімдері

AdS кеңістігінде бейсызықты дуалды ЭГБ гравитациясы әсері төмендегідей өрнектеледі:

$$S = \frac{1}{2}\int d^5x\sqrt{-g}\left[R - 2\Lambda + \alpha \mathsf{L}_{\mathrm{GB}} - L(F)\right], \tag{3.1}$$

мұнда R -бұл кеңістіктің қисықтық скаляры (Риччи скаляры), Λ - космологиялық тұрақты, оны l Планк ұзындығы арқылы өрнектеуге болады, $-6/l^2$, α бұл ГБ гравитациясындағы байланыс функциясы, ал $\mathsf{L}_{\mathrm{GB}} = R_{\mu\nu\gamma\delta}R^{\mu\nu\gamma\delta} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2$ ЭГБ гравитациясындағы лагранжиан тығыздығы, мұнда $R_{\mu\nu}$ және $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$ Риччи және Риман тензорлары болып табылады. Мұнда L, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ тәуелді қандай да бір лагранжиан, мұнда $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ Максвелл өрісінің кернеулігінің тензоры. J_μ бұл көзге сәйкес келетін ток векторы.

Біз ҚҚ жүйесін Плебанский $P_{\mu\nu}$ тензоры тұрғысынан зерттейміз $P_{\mu\nu} := 2\frac{\partial L}{\partial F^{\mu\nu}} = F_{\mu\nu}L_F$, мұнда. $L_F = \partial L/\partial F$ Қарастырылып отырған жүйенің

бейсызықтық электродинамикасын балама түрде Лежандр түрлендіруі [121, p. 149-151]. $H = 2FL_F - L$ арқылы алуға болады , бұл антисимметриялық өріске байланысты $((P = \frac{1}{4}P_{\mu\nu}P^{\mu\nu}))$ [118, p. 174;121, p. 149-151]. Осылайша, бейсызықтық электродинамиканың лагранжианын келесідей көрсетуге болады:

$$L = 2PH_P - H \qquad H_P = \frac{\partial H}{\partial P}, \tag{3.2}$$

мұнда $F_{\mu\nu} = H_P P_{\mu\nu}$ электромагниттік өріс кернеулігі, ал $H(P)$ бұл құрылымдық тұрақты.

Метрикалық тензор $g_{\mu\nu}$ мен потенциал A_μ бойынша әсерлерді (3.1) өзгерту өріс теңдеулеріне әкеледі [118, p. 174; 121, p. 149-151]:

$$I_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} + H_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad = \quad T_{\mu\nu} = 2\left(H_P P_{\mu\lambda} P_\nu^\lambda - \delta_{\mu\nu}(2PH_P - H)\right), \tag{3.3}$$

$$\nabla_\mu P^{\mu\nu} \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}P^{\mu\nu}) = 0. \tag{3.4}$$

Мұнда тек тривиальды емес және нүктелік көзге сәйкес келетін дельта функциясымен берілген уақытша J^ν компонент

Мұнда G_{ab} Эйнштейн тензоры және H_{ab} Ланцош тензоры [143, p. 168025]:

$$G_{\mu\nu} \quad = \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \tag{3.5}$$

.

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu} \quad = \quad & -\frac{\alpha}{2}\Big[8R^{\rho\sigma}R_{\mu\rho\nu\sigma} - 4R_\mu^{\rho\sigma\lambda}R_{\nu\rho\sigma\lambda} - 4RR_{\mu\nu} + 8R_{\mu\lambda}R_\nu^\lambda \\ & + g_{\mu\nu}\left(R_{\mu\nu\gamma\delta}R^{\mu\nu\gamma\delta} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2\right)\Big] \end{aligned} \tag{3.6}$$

Айқын көрініс кейінірек пайда болады. Мұнда AdS кеңістіктегі ЭГБ тұрақты ҚҚ-ының 5D шешімін алып және оның қасиеттерін зерттеу қажет. Ол үшін статикалық сфералық симметрияны жазайық [147, p. 135658]:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 + \sin^2\theta\sin^2\phi d\phi^2) \tag{3.7}$$

мұнда $f(r)$- тек қана r айнымалыға тәуелді қандай да бір метрикалық функция. Сондықтан біз электр өрісін шамамен шектейміз:

$$F_{\mu\nu} = E(r)(\delta^t_\mu \delta^r_\nu - \delta^t_\nu \delta^r_\mu). \tag{3.8}$$

Сфералық симметриялы жағдай үшін (3.4) теңдеуді келесідей жазуға болады:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 F^{\mu\nu} L_F\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P^{\mu\nu}\right) = 0. \tag{3.9}$$

Енді туынды ішіндегі термин тұрақты болуы үшін [182] (біз электр e зарядын таңдаймыз):

$$r^2 P^{\mu\nu} = -e(\delta^t_\mu \delta^r_\nu - \delta^t_\nu \delta^r_\mu) \Rightarrow P^{\mu\nu} = -\frac{e}{r^2}(\delta^t_\mu \delta^r_\nu - \delta^t_\nu \delta^r_\mu), \tag{3.10}$$

мұнда P инвариантты шама болып табылады және келесі өрнекпен анықталады, $P = -\frac{e^2}{2r^4}$ теңдеуі P инвариантқа тәуелді нақты құрылымдық $H(P)$ функция келесідей анықталады

$$H(P) = \frac{3}{2se^4}\left(\frac{\sqrt{-2e^2 P}}{1+\sqrt{-2e^2 P}}\right)^{7/3}, \tag{3.11}$$

мұнда s қандай да бір массасы M заряды e, $s = |e|/2M$ өрнегімен анықталатын қандай да бір бір еркін параметр болып табылады. Құрылымдық функция (3.11) бейсызықтық электродинамика үшін қажетті ақылға қонымды жағдайларды негіздейді, өйткені ол әлсіз $P << 1$ өрістер үшін $H(P) \to P$ Максвеллдің сызықтық электродинамикасына ауысады, сонымен қатар әлсіз $H < 0$ энергия $H_P > 0$ жағдайын қанағаттандырады [119, p. 629-632; 127, p. 2855-2862; 128, p. 14-16].

(3.3) және (3.10) теңдеулердің көмегімен біз энергия-импульс тензорының нөлдік емес компоненттерін аламыз:

$$T^t_t = T^r_r = \frac{3e^3 M}{(r^3+e^3)^{7/3}}, \tag{3.12}$$

.

$$T^\theta_\theta = T^\phi_\phi = T^\psi_\psi = \frac{2e^3 M(3e^3 - 4r^3)}{(r^3+e^3)^{10/3}}. \tag{3.13}$$

Метрикалық анзацты (3.7) қолдана отырып, Эйнштейн өрісі теңдеуінің нөлдік емес компоненттері келесі түрде болады:

$$I_t^t = I_r^r = (4\alpha f'(r) - 2r)(f(r) - 1) - r^3 f'(r) = \frac{6Me^3}{(r^3 + e^3)^{7/3}}, \tag{3.14}$$

$$I_\theta^\theta = I_\phi^\phi = I_\psi^\psi = \frac{2rf' + f + \frac{r^2}{2} f'' + 2\alpha(f'' + f'^2 + f'') - 1}{r^2} = \frac{2e^3 M(3e^3 - 4r^3)}{(r^3 + e^3)^{10/3}}, \tag{3.15}$$

мұнда жалғыз және қос жай сандар сәйкесінше бірінші және екінші туынды болып табылады. Жоғарыдағы теңдеулер метрикалық функцияға әкеледі:

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{4\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{8\alpha M}{(r^3 + e^3)^{4/3}} - \frac{8\alpha}{l^2}}\right). \tag{3.16}$$

Мұнда шешім *M*-масса параметрімен, q зарядпен және α ГБ байланыс тұрақтысымен сипатталатынын көруге болады. Мұнда теңдеудің (3.16) шешімдерінің екі тармағы ($+ve$ және $-ve$ жағдай) бар екені ескеріледі. Теріс тармақ тұрақты және асимптотикалық түрде Шварцшильд шешіміне айналады .

ҚҚ $M = 0$ шегінде шешімі (3.16) келесідей болады:

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{4\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8\alpha}{l^2}}\right). \tag{3.17}$$

Егер $\alpha > 0$, бізде $8\alpha/l^2 \le 1$ бұл шектен тыс ҚҚ үшін шешім жоқ. Осылайша, (3.1) әсері тиімді космологиялық тұрақтылары бар екі шешімге ие $l_{eff}^2 = \frac{l^2}{4}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8\alpha}{l^2}}\right)$. Алайда, егер $8\alpha/l^2 = 1$ болса екі шешім де сәйкес келеді, сондықтан теорияда жалғыз AdS вакуумдық шешімі бар.

Алынған ҚҚ шешімдерін зерттеу басқа ұқсас гравитациялық ЭГБ класы ҚҚ шешімдерінің арасындағы айырмашылықты түсінуге көмектеседі [134, p. 115854; 139, p. 168347].

1. Алынған ҚҚ шешімі алдыңғы шешімдерден ерекшеленеді [134, p. 115854; 139, p. 168347]. Лагранж тығыздығы мен ҚҚ шешімдерінің басқа көздерінің арасындағы айырмашылық реттіліктің ұлғаюынен айқын көрінеді:

$$L(P) = \frac{3}{2se^4}(-2e^2 P)^{7/3}\left(1 - \frac{7}{3}\sqrt{-2e^2 P} + \frac{70}{9}(\sqrt{-2e^2 P})^2 + O[P^2]\right). \tag{3.18}$$

Әлсіз өріс шегінде r (r үлкен мәндерде) ҚҚ RN ҚҚ-ына дейін азаяды, ал Бардин ҚҚ-ы оған тегіс өтеді. r-дің төмен мәндерде ҚҚ-ның шешімі төмендейді:

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{4\alpha}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{8M\alpha}{r^4} + \frac{32M\alpha e^3}{r^7} - \frac{8\alpha}{r^2} + O[e^6]}\right]. \tag{3.19}$$

ҚҚ шешімі (3.16) теңдеуде Бульвар-Дезер ҚҚ-ына дейін азаяды [183], Бардиннің бесөлшемді ҚҚ-ы [184] және Шварцшильд – Тангерилиннің ҚҚ-ы сәйкесінше $e = 0$ және $\alpha \to 0$.

Егер $\alpha < 0$,онда теңдеудің шешімі (3.16) бізге AdS шешімін береді, егер біз $-ve$ де-Ситтердің шешімін алсақ $+ve$. Вакуум жағдайында (3.16) теңдеуінде қандай белгіні қабылдау керектігін анықтау мүмкін болмайтын екі белгісі бар шешім (3.16) ақылға қонымды болып көрінеді. Бульвар мен Дезер тұрақсыз және асимптотикалық $+ve$ шешімге AdS Шварцшильдтің теріс гравитациялық массасы бар шешімі екенін көрсетті. Алайда (3.16) теңдеудің шешімі $-ve$ тұрақты және асимптотикалық Шварцшильд шешімі болып табылады. Осыдан, $+ve$ мәнінің шамалы физикалық қызығушылық тудыратындығын көреміз. Болашақта одан әрі талдау үшін $-ve$ теріс мән қабылданды.

Бұл шешім үлкен $(r \to \infty)$ және кіші $(r \to 0)$ қашықтықта келесідей әсер етеді:

$$f(r) = 1 - \frac{M}{r^2}, \qquad r \to \infty \tag{3.20}$$

$$f(r) = 1 - \Lambda_{eff} r^2, \qquad r \to 0 \tag{3.21}$$

мұнда $\Lambda_{eff} = \left(1 - \sqrt{1 + 8M\alpha/e^4 - 8\alpha/l^2}\right)/4\alpha$. Бұл шешім ЭГБ Бардиннің ҚҚ-ының де-Ситтердің орталық өзегі бар екенін көрсетеді.

Көкжиек күйінің сандық талдауы нөлдік емес α және e мәндерінде метрикалық функция $f(r)$ минималды болатындығын көрсетеді. Алайда, метрикалық көкжиек шарты көкжиек радиусы үшін және сәйкесінше r_- Коши мен r_+ оқиға көкжиегіне сәйкес келетін екі мүмкін түбірге мүмкіндік береді.

Әр түрлі параметрлерге сәйкес келетін ішкі және сыртқы көкжиектердің сандық мәндері төменде 3.1-кестеде келтірілген.

Кесте 3.1 – Әртүрлі e заряд мәндері үшін ішкі және сыртқы көкжиектерінің радиусы $\delta = r_+ - r_-$

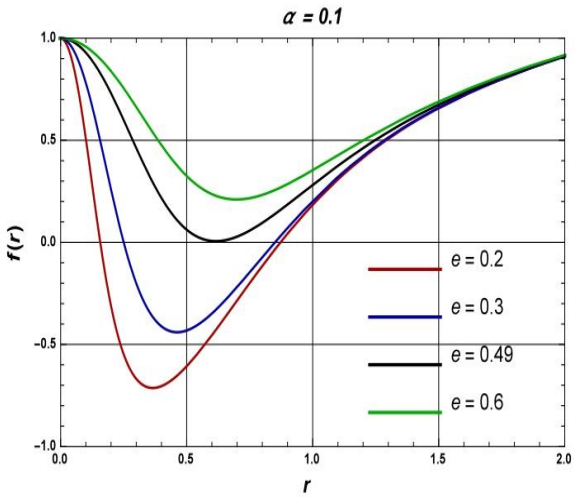
$\alpha = 0.1$				$\alpha = 0.2$			
e	r_-	r_+	δ	e	r_-	r_+	δ
0.493 (e_c)	0.624	0.624	0	0.373 (e_c)	0.566	0.566	0
0.40	0.37	0.81	0.44	0.25	0.27	0.74	0.47
0.45	0.45	0.76	0.31	0.25	0.35	0.71	0.36

3.1-суретте метрикалық функцияның көкжиек радиусына тәуелділігі көрсетілген.

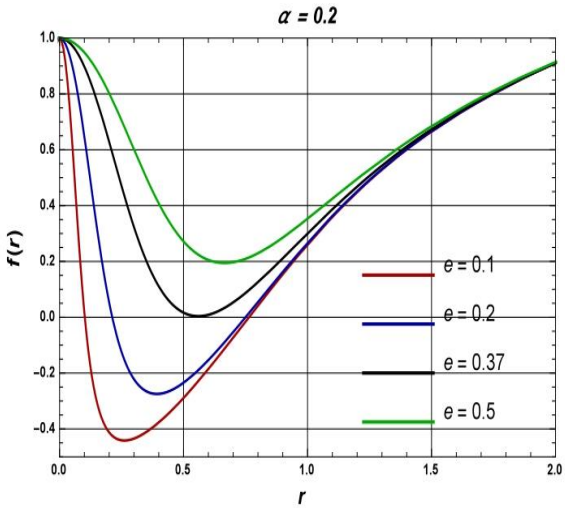
3.1-суреттен және 3.1-кестеден зарядтың шекті мәні үшін (оны e_c белгілейміз) метрикалық функцияның минимумы нөлге тең (қара сызық қисығы) және деградацияланған көкжиек бар екенін көруге болады. Алайда, $e < e_c$ кезінде ҚҚ-ның екі көкжиегі бар, $r_\pm$ экстремалды емес ҚҚ-ға сәйкес, ал $e > e_c$ көкжиекте жоқ, яғни ҚҚ да жоқ. ҚҚ мөлшері зарядтың жоғарылауымен және ГБ байланысының төмендеуімен азаятыны анықталды. Бұл заряд пен ГБ

байланысының әсерлері бір-біріне қарама-қарсы екенін білдіреді. Сондай-ақ, оқиға көкжиегінің радиусы e заряды ұлғайған сайын артып, α параметрі ұлғайған сайын азаятынын көруге болады.

Алынған ҚҚ шешімі қисықтық инварианттары (Риччи скаляры, Риччи $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ квадраты және Кретшман $R_{\mu\nu\lambda\sigma}R^{\mu\nu\lambda\sigma}$ скаляры) бір-бірінен алшақ болса, ал қисықтық инварианттары бір-біріне жақындаса, тұрақты болады. Мұнда бұл жүйе үшін қисықтық инварианттары келесі формула бойынша есептеледі (3.1-сурет).



(а)



(ә)

Сурет 3.1 – Метрикалық функцияның $f(r)$ көкжиек r радиусына e зарядтың және $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.2$ мәндерінің өзгерісіне тәуелділігі

Ескерту – Әдебиет негізінде құралған [179]

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0} R &= -\frac{5}{\alpha}+\frac{5}{\alpha}\sqrt{1+\frac{8M\alpha}{e^4}-\frac{8\alpha}{l^2}},\\
\lim_{r\to 0} R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} &= \frac{10}{\alpha^2}+\frac{40}{e^4\alpha}-\frac{10}{\alpha^2}\sqrt{1+\frac{8M\alpha}{e^4}-\frac{8\alpha}{l^2}},\\
\lim_{r\to 0} R_{\mu\nu\lambda\sigma}R^{\mu\nu\lambda\sigma} &= \frac{5}{\alpha^2}+\frac{20}{e^4\alpha}-\frac{5}{\alpha^2}\sqrt{1+\frac{8M\alpha}{e^4}-\frac{8\alpha}{l^2}}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$M \neq 0$ мәнінде инварианттар координаттардың бастапқы мәнін қоса алғанда жақсы әсер ететіндігі байқалды. Осылайша, Бардиннің AdS ҚҚ-ы тұрақты (сингулярлы емес) ҚҚ болып табылады.

Алынған ҚҚ шешімі-Коши $r_0 = r_-$ көкжиегінде AdS ядросы бар тұрақты ҚҚ-дар, ол нөлдік бет болып табылады. Ішкі аймақ $r < r_0 = r_-$ сәйкесінше зарядталмаған және AdS күй теңдеуін қанағаттандырады, мұнда r_0 бетінің шекарасын білдіреді.

Енді осы қарапайым ҚҚ-ның үш түрлі аймағының ерекшеліктерін қарастырсақ:

– $r < r_0 = r_- = R$ аумағында зарядталмаған;

– $r = r_0 = r_- = R$ электрлік зарядталған, бірақ массасы жоқ қабат бар;

– $r > r_0 = r_- = R$ аумағында бұл RN сияқты вакуум.

3.2 Басқа ұқсас шешімдермен қысқаша салыстыру

Жақында жарық көрген[185] жұмыста әр түрлі бейсызықтық электродинамикамен қарастырылған ЭГБ гравитациясы аясындағы төрт өлшемді ҚҚ шешімі талқыланады. Үлкен асимптотикалық шекте шешімнің теріс тармағы Шварцшильд AdS ҚҚ-ына сәйкес келеді, ал оң тармақтың физикалық мағынасы болмайды, өйткені ол теріс массаға сәйкес келеді. Алайда, ГБ параметрі нөлге тең болғанда, шешім Хейвардтың (Hayward black hole) AdS ҚҚ-ына сәйкес келеді.

Келесі жұмыста [186] ЭГБ гравитациясындағы төрт өлшемді ҚҚ әр түрлі бейсызықтық электродинамикамен байланысты зерттелген және бұл ҚҚ екі рет фазалық ауысудан өтеді. Алайда, Хейвард пен Борн-Инфельдтің ЭГБ ҚҚ-дары фазалық ауысудан бір рет қана өтеді.

3.3 Бардиннің қара құрдымының термодинамикасы

Бұл бөлімде термодинамиканың бірінші заңын қанағаттандыратын ЕГБ гравитациясындағы Бардиннің AdS ҚҚ-дарының шешімінің термодинамикалық шамаларын шығарамыз. Көкжиектегі ҚҚ массасы төмендегі формула бойынша есептеледі:

$$M_+ = (e^3 + r_+^3)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{r_+^2 + 2\alpha}{r_+^4} + \frac{1}{l^2} \right). \tag{3.23}$$

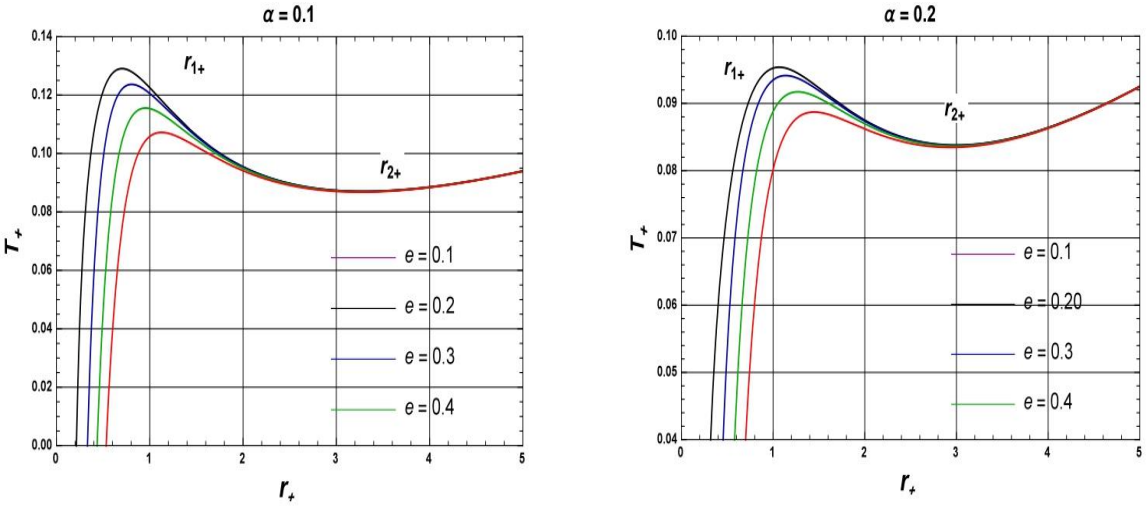
Стандартты анықтаманы қолдана отырып, берілген ҚҚ шешіміне сәйкес келетін Хокинг температурасы келесі өрнекпен анықталады:

$$T_+ = \left. \frac{f'(r)}{4\pi} \right|_{r=r_+} = \frac{1}{4\pi r_+ (e^3 + r_+^3)(r_+^2 + 4\alpha)} \left[\frac{2r_+^7}{l^2} + 2r_+^5 - 2e^3 (r_+^2 + 4\alpha) \right]. \tag{3.24}$$

Бұл өрнектен ЭГБ гравитациясындағы Бардиннің ҚҚ-ы температурасы [183, p. 168347], Бардиннің ҚҚ-ы [184, p. 2656] және Шварцшильд-Тангерилинидің ҚҚ-ынан гөрі жалпылама екенін көруге болады, өйткені температураның тиісті мәндеріне тек $e = 0$ және $\alpha = 0$ сәйкесінше шекті $\alpha = e = 0$ мәнді алу арқылы қол жеткізуге болады.

Әр түрлі параметрлерге сәйкес келетін температураның табиғатын зерттеу үшін температураның графигін әр түрлі r_+ мәндерге қатысты e және α (3.2-сурет)өзгерісіне сай тұрғызамыз. Диаграммадан температура минималды

метрикалық функцияға сәйкес келетін максималды T_+^{Max} мәнді қабылдайтынын көруге болады.



(а) (ә)

Сурет 3.2 – Электр e зарядының әртүрлі мәндерінде $\alpha = 0.1$ және $\alpha = 0.2$ мәндері үшін және тұрақты T_+^{Max} мәні бар температураның r_+ тәуелділігі

Ескерту – Әдебиет негізінде құралған [179]

e және α сәйкес келетін және 3.2-кестеде келтірілген максималды температураның T_+^{Max} сандық мәндері. Бұл кестеден Хокинг температурасы көкжиектің шекті радиусындағы максималды мәндерді қабылдайтынын көруге болады. Төтенше шектерде (Коши көкжиегі мен оқиға көкжиегі сәйкес келген кезде) температура нөлге айналады.

Кесте 3.2 – Әр түрлі e заряд мәндері үшін шекті r_c радиустағы Хокингтің максималды T_+^{Max} температурасы

$\alpha = 0.1$						$\alpha = 0.2$				
ℓ	0	0.40	0.45	0.493	0.55	0	0.25	0.30	0.373	0.45
r_c	0.63	0.104	0.108	1.11	1.19	0.897	0.996	1.088	1.36	1.39
T_+^{Max}	0.092	0.097	0.090	0.087	0.082	0.088	0.095	0.0812	0.0786	0.0743

ҚҚ термодинамикасының бірінші заңы келесідей:

$$dM_+ = T_+ dS_+ + \Phi de, \tag{3.25}$$

мұнда Φ электр e зарядына сәйкес келетін электр потенциалы. Енді алынған ҚҚ шешімінің энтропиясын есептейік (3.26):

$$S_+ = \int T_+^{-1} dM_+ = \int \frac{1}{T_+} \frac{\partial M_+}{\partial r_+} dr_+ = \frac{4\pi r_+^3}{3}\left[1 + \frac{12\alpha}{r_+^2} - \frac{e^4}{r_+^6}(3r_+^2 + 4\alpha)\right]. \qquad (3.26)$$

мұнда $\xi(M_+, r_+)$ келесі өрнекпен анықталады:.

Мұнда теңдеудегі екі қосымша термин (3.26) энтропияны кеңейтетінін және әдеттегі $S = \frac{A}{4}$ аудан заңы енді қолданылмайтынын ескереміз. Заряд e болмаған жағдайда жоғарыдағы энтропия (3.26) ЭГБ ҚҚ энтропиясына дәл сәйкес келеді [183, p. 168347].

Кәдімгі ҚҚ-ның энтропиясы аудан заңына бағынбайтыны белгілі [122, p. 5056; 123; 126, p. 124005], энергия-импульс тензоры қазірдің өзінде ҚҚ-ның массасын қамтиды. Сәйкессіздікті жою үшін Ма мен Чжао қосымша мультипликаторды енгізу арқылы ҚҚ термодинамикасының бірінші заңының [187, 188] түзетілген түрін ұсынды. Термодинамиканың өзгертілген бірінші заңы [136, p. 169157; 189]:

$$\xi(M_+, r_+) dM = T_+ dS + \Phi de, \qquad (3.27)$$

мұнда $\xi(M_+, r_+)$ келесі өрнекпен анықталады

$$\xi(M_+, r_+) = 1 + 4\pi \int_{r_+}^{\infty} r_+^2 \frac{\partial T_t^t}{\partial M} dr_+ = \frac{r_+^4}{(r_+^3 + e^3)^{4/3}}. \qquad (3.28)$$

Бұл $\xi(M_+, r_+)$ мәнмен термодинамиканың өзгертілген бірінші заңының энтропиясы аудан заңына бағынатындығын тексеруге болады.

3.4 Термодинамикалық жүйенің жергілікті және жаһандық тұрақтылығы

Термодинамикалық жүйенің жергілікті және ғаламдық тұрақтылығын жүйенің G_+ жылу сыйымдылығы мен Гиббс G_+ бос энергиясын зерттеу арқылы сипаттауға болады. Мысалы, G_+ термодинамикалық жүйе $C_+ > 0$ немесе $G_+ < 0$ кезінде тұрақты немесе тұрақсыз болып қалады. Жүйенің жылу сыйымдылығы келесі өрнекпен анықталады:

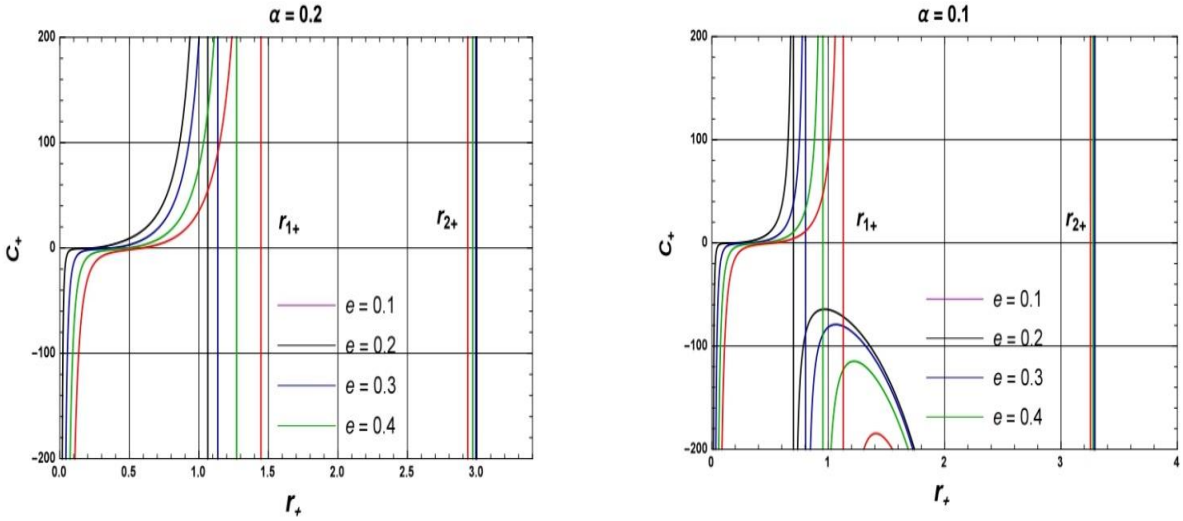
$$C_+ = \frac{\partial M_+}{\partial T_+} = \left(\frac{\partial M_+}{\partial r_+}\right)\left(\frac{\partial r_+}{\partial T_+}\right). \qquad (3.29)$$

Масса (3.23) және температура (3.24) в (3.29) мәндерін алмастыра отырып, гравитациялық Бардиннің ЭГБ ҚҚ-ының жылу сыйымдылығы келесі өрнекті құрайды:

$$C_+ = \frac{4\pi\beta^2\left[r_+^5(l^2 + 2r_+^2) - e^2 l^2 \beta\right]}{r_+^3\left[e^6 l^2 \beta^2 + r_+^8(-l^2\beta_1^2 + 2r_+^2\beta_2) + e^3(8r_+^7\beta_3 + l^2(6r_+^5\beta_4 + 64r_+^3\alpha^2))\right]}, \qquad (3.30)$$

мұнда $\beta = r_+^2 + 4\alpha$, $\beta_1 = r_+^2 - 4\alpha$, және $\beta_2 = r_+^2 + 6\alpha$, . $\beta_2 = r_+^2 + 8\alpha$

Жылу сыйымдылығы C_+ әр түрлі e және α мәндер үшін 3.3-суретте салыстырмалы түрде көрсетілген және бұл жылу сыйымдылығы $r_+ = 1$ нүктелерде де, $r_+ = 3.2$ нүктелерде де, тиісті температура жергілікті максимумдар мен жергілікті минимумдарға ие болған кезде де әр түрлі болады деп болжайды. 3.3-суреттен ҚҚ екі рет фазалық ауысуды бастан кешіретінін көруге болады: біріншіден $\alpha = 0.1$, кішігірім $r_+ = 1.5$ тұрақты ҚҚ-дардан үлкен тұрақсыз $r_+ = 3.0$ ҚҚ-дарға, екіншіден, $\alpha = 0.2$ кішігірім тұрақсыз ҚҚ-нан үлкен тұрақты ҚҚ-ға r_+ радиустар α өсуімен де, e өсуімен де артады.



(а) (ә)

Сурет 3.3 - Электр e зарядының әртүрлі $\alpha = 0.1$ және $\alpha = 0.2$ мәні бар және G_+ тұрақты мәні бар жылу сыйымдылығының r_+ тәуелділігінің графигі

Ескерту – Әдебиет негізінде құралған [179]

Енді Гиббстің бос энергиясын зерттеу үшін алдымен оны келесі өрнекті қолдана отырып бағалау керек:

$$G_+ = M_+ - T_+ S_+. \tag{3.31}$$

мұнда M_+, T_+ және S_+,мәндерді қоя отырып, келесі теңдеуді алынды:

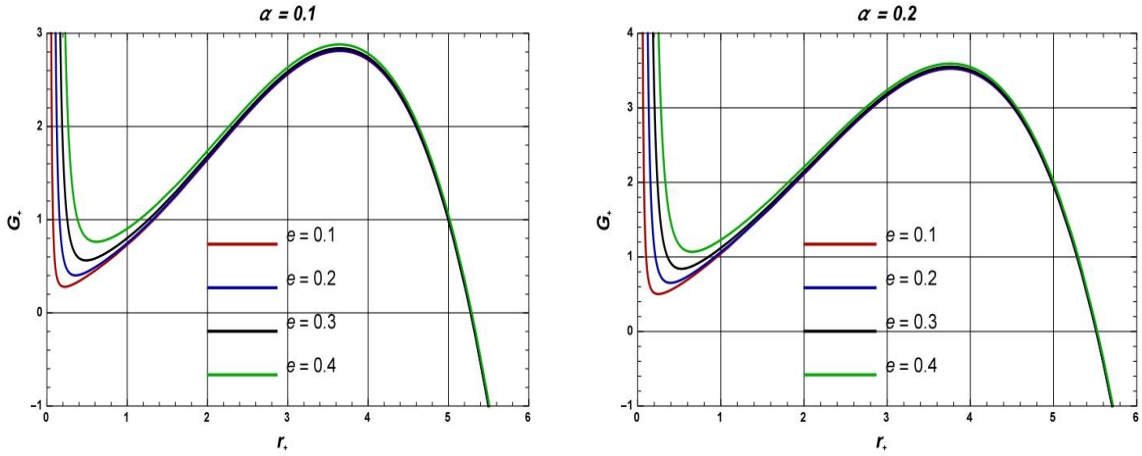
$$G_+ = (e^3 + r_+^3)^{4/3}\left(\frac{r_+^2 + 2\alpha}{r_+^4} + \frac{1}{l^2}\right) - \frac{2r_+^2}{3(e^3 + r_+^3)(r_+^2 + 4\alpha)}\left(\frac{r_+^7}{l^2} - (r_+^5 - e^3(r_+^2 + 4\alpha))\right). \tag{3.32}$$

Шекті температурада Гиббстің бос энергиясы жоғалады. Осылайша, шекті температураны $G_+ = 0$ ескере отырып келесідей есептеуге болады:

$$T_{min} = \frac{3}{4\pi}\frac{(e^3 + r_+^3)^{4/3}}{r_+^3}\left(\frac{(r_+^2 + 2\alpha)}{r_+^4} + \frac{1}{l^2}\right). \tag{3.33}$$

Егер $T_+ > T_C$ ҚҚ жаһандық тұрақты деп аталады. Алайда $T_+ < T_C$ ҚҚ-ның жаһандық тұрақсыздығын сипаттайды.

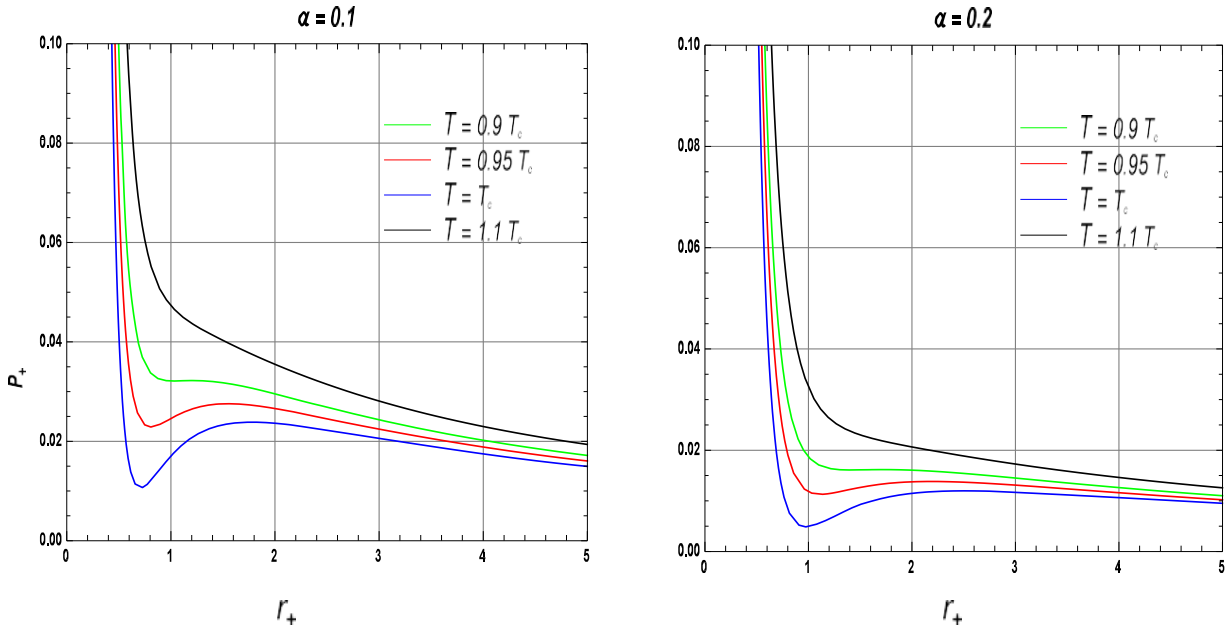
Жалпы, Гиббстің бос энергиясы Гиббстің теріс бос энергия мәндері бар ҚҚ-дар термодинамикалық тұрғыдан тұрақты және олардың оң аналогтарына қатысты тұрақсыз екенін көрсетеді. Гиббстің бос энергиясының табиғатын зерттеу үшін (3.32) теңдеуін пайдаланып e және α түрлі мәндері үшін график құрайық (3.4-сурет). 3.4-суреттен бос энергияның көкжиек $r_+ = r_{HP}$ радиустарында $r_+ = 0.1$ және $r_+ = 3.8$ жергілікті минимумдар мен жергілікті максимумдар бар екенін және сәйкесінше жылу сыйымдылығы әр түрлі болатындығын көруге болады (3.5-сурет) және температура экстремалды мәндерге жетеді. Бірінші типтегі Хокинг-Пейдж фазалық ауысуы бос энергия $r_{HP} > rb+$ теріс болатын жерде жүреді.Осылайша, көкжиек радиусы бар үлкен ҚҚ-дар термодинамикалық тұрғыдан жаһандық тұрақты. Алайда, көкжиектің өте аз r радиустарында Хокинг температурасы $G_+ < 0$ теріс. Бұл ЖСТ-дағы Хокинг-Пейдж фазалық ауысуына дәл сәйкес келеді. Бүкіл Ғаламда ҚҚ шешімі AdS термиялық фондық шешімдеріне үлкен r мәндер үшін артықшылық беретіні анықталды.



(а) (ә)

Сурет 3.4 – Электр e зарядының өзгермелі мәні үшін Гиббстің G_+ еркін энергиясының r_+ көкжиек радиусына тәуелділік графигі, $\alpha = 0.1$ және $\alpha = 0.2$ мәндері үшін

Ескерту – Әдебиет негізінде құралған [179]



(а) (ә)

Сурет 3.5 – α = 0.1 және α = 0.2 үшін е заряды тұрақты болғандағы P_+-ның оқиға көкжиегі радиусына тәуелділігі, әртүрлі T_+ температура өзгерістері бойынша.

Ескерту – Әдебиет негізінде құралған [179]

3.5 Фазалық ауысулар

Бұл бөлімде AdS ЭГБ Бардин ҚҚ-ының гравитациясы үшін шекті $P-V$ және фазалық ауысу қарастырылады. Космологиялық тұрақты термодинамикалық қысыммен $\Lambda = -8\pi P$ тәуелді болады. Осылайша, күй теңдеуін (КТ) (3.24) теңдеуді пайдалана отырып төмендегідей алуға болады:

$$P_+ = \frac{3}{8\pi r_+^7}\left(e^3(r_+^2+4\alpha)-r_+^5\right)+\frac{3T}{4r_+^6}\left((r_+^3+e^3)(r_+^2+4\alpha)\right). \qquad (3.34)$$

ҚҚ массасы термодинамикалық жүйенің энтальпиясын түсіндіреді (3.5-сурет). Термодинамикалық көлем келесі формула бойынша есептеледі:

$$V = \left(\frac{\partial M_+}{\partial P_+}\right)_{S_+} = \frac{4\pi}{3}\left(r_+^3+e^3\right)^{\frac{4}{3}}. \qquad (3.35)$$

Иілу нүктелерінде шекті радиусты, шекті температураны және шекті қысымды алу келесі қатынастарды қолдана отырып есептеуге болады:

$$\frac{\partial P_+}{\partial r_+} = 0, \qquad \frac{\partial^2 P_+}{\partial r_+^2} = 0. \qquad (3.36)$$

Бұдан келесі өрнек алынады:

$$r_+^8(r_+^2-12\alpha)-2e^6(5r_+^4+54r_+^2\alpha+16\alpha^2)-6e^3(3r_+^7+40r_+^5\alpha+112r_+^3\alpha^2)=0. \quad (3.37)$$

Аналитикалық теңдеуді шешу (3.37) оңай мәселе емес. Керісінше, оны сандық түрде шешуге болады. Мұнда шекті r_C радиустың, шекті P_C қысымның және шекті T_C температураның шекті мәндері есептелді. Осы түзу сызықпен кесілген изотерманың қисық бөлігі сұйықтық біртекті болса, рұқсат етілген күйлердің қандай болатынын дұрыс көрсетеді. Алайда, бұл біртекті күйлер тұрақсыз, өйткені Гиббстің бос энергиясы төмен болған кезде бірдей қысымда әрдайым басқа аралас күй болады.

Тиісті сандық мәндер 3.3, 3.4-кестелерде α және e мәндерімен берілген.

Кесте 3.3 – Шекті r_C радиустың, шекті T_C температураның, шекті P_C қысымның және $P_C r_C/T_C$, сәйкесінше ℓ және $\alpha = 0.1$

α	r_C	T_C	P_C	$P_C r_C/T_C$
0.1	1.112	0.144	0.0327	0.252
0.2	1.204	0.140	0.0302	0.259
0.3	1.362	0.132	0.0260	0.268
0.4	1.552	0.122	0.217	0.276
0.5	1.760	0.112	0.0179	0.281

Кесте 3.4 – Шекті r_C радиустың, шекті T_C температураның, шекті P_C қысымның және $P_C r_C/T_C$ әртүрлі e және $\alpha = 0.1$ сәйкес келетін сандық мәндері

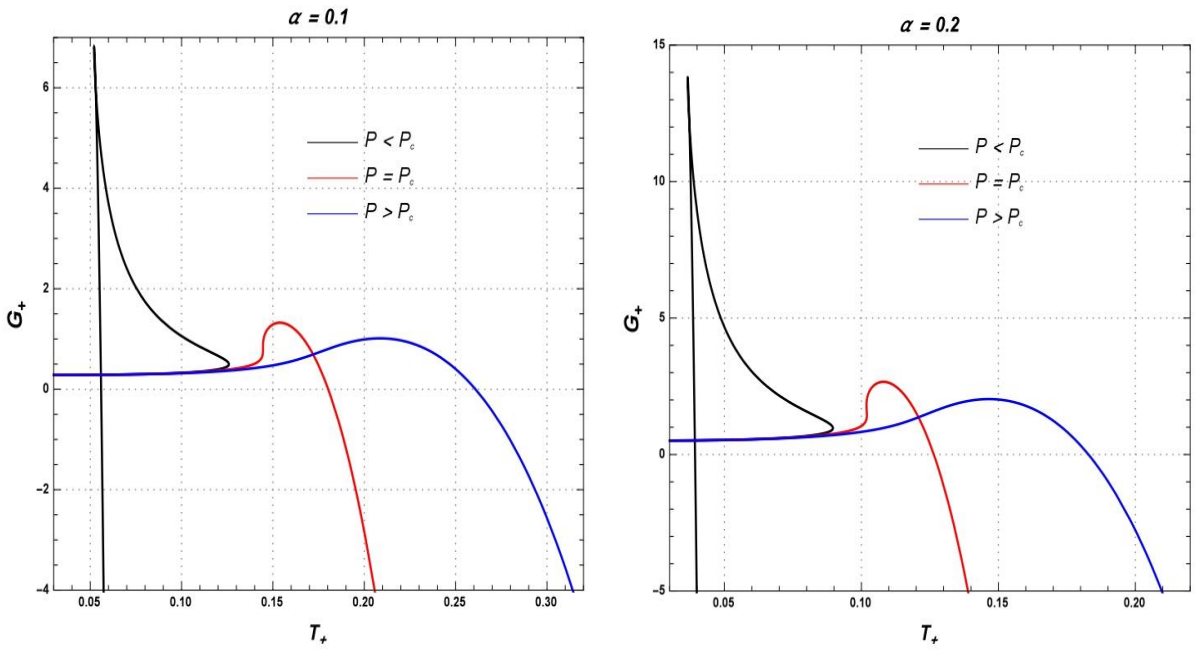
e	r_C	T_C	P_C	$P_C r_C/T_C$
0.1	1.112	0.144	0.0327	0.252
0.2	1.557	0.102	0.0164	0.250
0.3	1.903	0.0838	0.0110	0.249
0.4	2.195	0.0725	0.0082	0.248
0.5	2.453	0.0649	0.0066	0.247

Шекті r_C радиус өскен сайын α және e мәндері арта түсетіні байқалады. Алайда шекті T_C температура мен шекті P_C қысым жоғарылаған сайын ℓ және α төмендейді. Мұнда, $P_C r_C/T_C$ әмбебап қатынас e заряд өсумен α бірге артады.

Осы ҚҚ-ның фазалық ауысуы α мен ℓ фазалық ауысуына әсерін зерттеу үшін біз Гиббстің бос энергиясының температураға тәуелділігін 3.6, 3.7 және 3.8-суреттерде көрсетілгендей график алынды.

3.6-суретте бос Гиббс G_+ энергиясының α және ℓ тұрақтыларының белгіленген мәндеріндегі T_+ температураға тәуелділігі көрсетілген. Белгілі бір температура диапазонында біз ҚҚ-дардың үш түрі бар екенін байқаймыз:

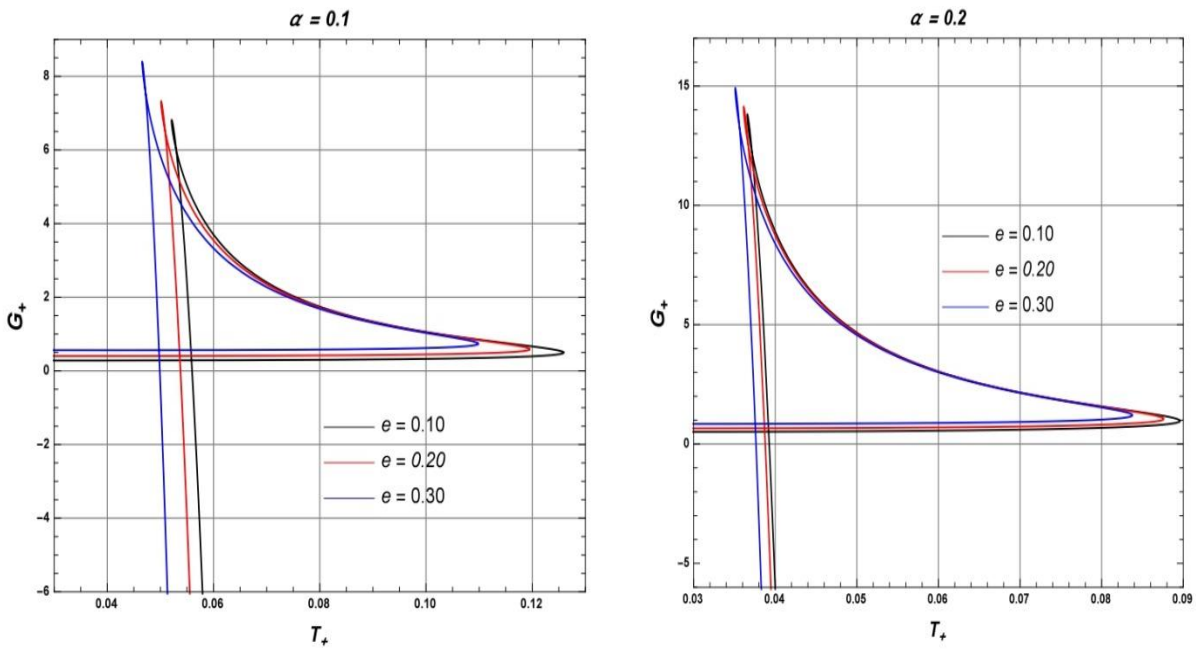
$\left(P < P_C\right)$шағын, $\left(P = P_C\right)$ орташа және $\left(P > P_C\right)$ үлкен ҚҚ-дар. Мұнда кіші және үлкен ҚҚ-дар орташа ҚҚ-ға қарағанда тұрақтырақ, өйткені меншікті жылу теріс (Сурет 3.3). Бұл суреттен ҚҚ бірдей бос энергия есебінен бір фазадан екінші фазаға өтетін ауысу T_*температурасы бар екені анық. Өтпелі транзиттік температуралардың мәндері сәйкесінше $T_{\text{å}} = 0.0564$ және $T_{\text{å}} = 0.0358$ тең, $\alpha = 0.1$ және $\alpha = 0.2$ с. 3.6-суретте изотермалар нүктедегі бірінші $T_+ < T_{\text{å}}$ ретті фазалық ауысуды және нүктедегі екінші ретті $T_+ = T_{\text{å}}$ фазалық ауысуды бейнелейді, ол бос энергия диаграммасынан алынады, яғни $T_+ > T_{\text{å}}$ нүктеде шағын ҚҚ пайда болады, ал үлкен қара бос энергияның төмен болуына байланысты $G_+ - T_+$ нүктеде саңылау пайда болады.



(а) (ә)

Сурет 3.6 – Қара құрдымның термодинамикалық қысымы P_+-ның меншікті көлемге v тәуелділігі (P–v диаграммасы) әртүрлі Хокинг температурасы T_+ мәндері кезіндегі изотермалар түрінде

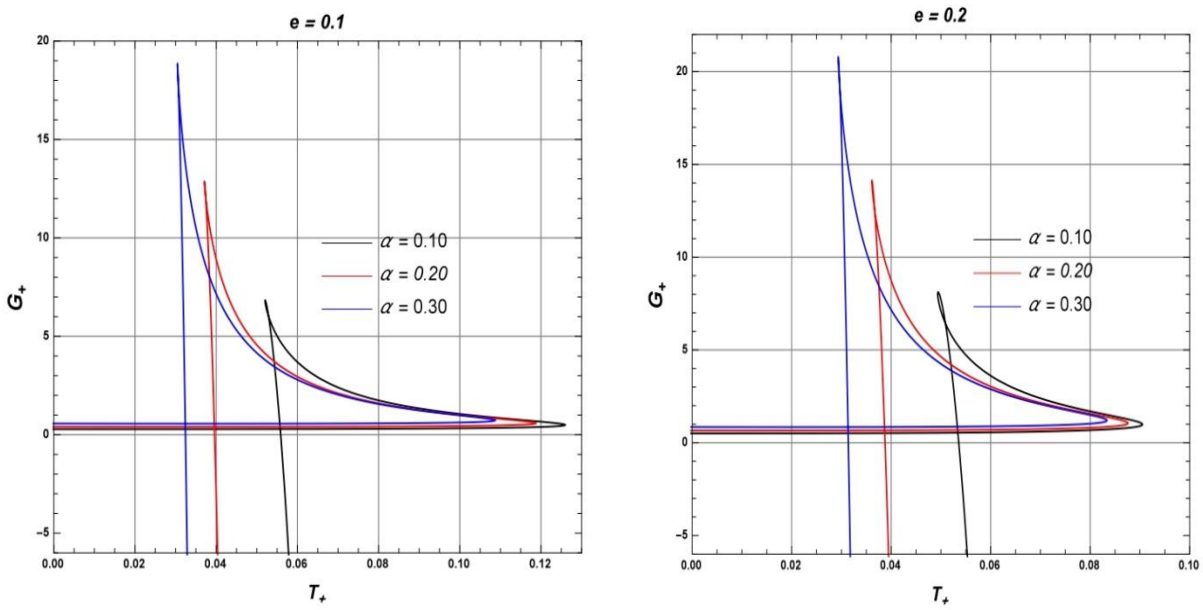
Ескерту – Әдебиет негізінде құралған [179]



(а) (ә)

Сурет 3.7 – Гиббс еркін энергиясы G_+-нің Хокинг температурасы T_+-ға тәуелділігі әртүрлі Гаусс–Бонне тұрақтысы α мәндері кезінде

Ескерту – Әдебиет негізінде құралған [179]



(а) (ә)

Сурет 3.8 – e заряд өзгеруіне қарай Гиббстің G_+ еркін энергиясының T_+ температураға тәуелділігі.

Ескерту – Әдебиет негізінде құралған [179]

3.6-суретте G_+ Гиббс бос энергиясының T_+ температураға тәуелділігі көрсетілген, фазалық ауысу нүктесін көрсететін қарлығаш қанаты пішіні түрінде кескін алынған. 3.6-суреттің сол жақ панелінде қарлығаш қанаты пішіні бірінші тектегі $P < P_c$ фазалық ауысу нүктесінде, сондай-ақ екінші тектегі $P = P_c = 0.0327$ фазалық ауысулар кезінде $\alpha = 0.1$ және $P = P_c = 0.0164$ кезінде пайда болатынын көруге болады.

3.7, 3.8-суреттерде e және α изобарларға әсері де көрсетілген. Изобарлар e ұлғайған сайын α көбейеді және екі сынға дейінгі изобарлар арасындағы алшақтық та артады. Субшекті изобара-бұл фазалық ауысу жүретін режим. Гиббстің екі фазадағы бос энергиясы шамамен тұрақты және α-ға аз тәуелді екенін атап өткен жөн. Бір қызығы, әмбебап х қатынасы e ұлғайған сайын α артады және ГБ байланыс параметрінің жоғарылауымен азаяды.Бұл электр заряды мен ГБ байланысының әсерлері бір-біріне қарама-қарсы екенін көрсетеді.

ҚҚ Гиббстің G_+ ең аз бос энергиясы болған кезде термодинамикалық тұрақты күйде болады. Гиббстің G_+ еркін энергетикалық сипаттамасы T_+ температураның функциясы болып табылады, $P < P_c$ және $(P > P_c)$ Гиббстің бос энергетикалық графигінде қарлығаш құрылымы дамиды, бұл бірінші тектегі фазалық ауысуды болжайды, ал қарлығаш құрылмы жоғалады (бірінші тектегі фазалық ауысу аяқталады), бұл екінші тектегі фазалық ауысуды білдіреді. Фазалық ауысу жоқ, термодинамикалық қысымда шекті P_C қысымнан асады. ҚҚ бір фазадан екінші фазаға бірдей бос энергия арқылы өтеді және сәйкес температура ауысу температурасы болып табылады.

3.6 AdS/CFT сәйкестігі шеңберіндегі фазалық құрылым

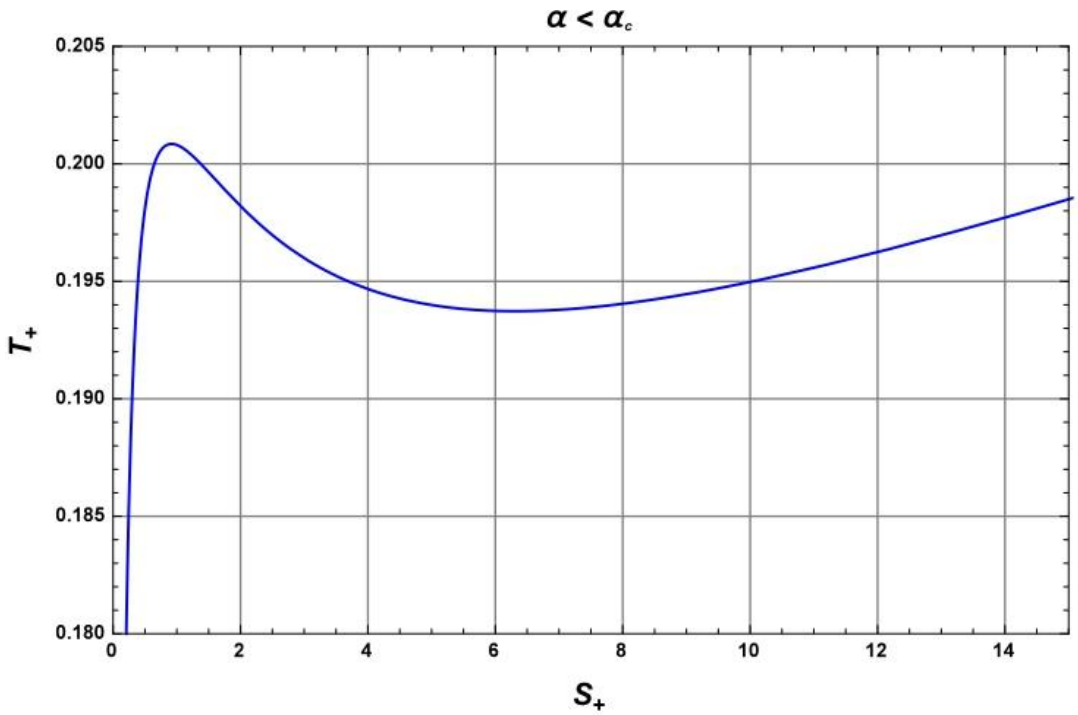
Фазалық құрылымды голография тұрғысынан зерттеу үшін алдымен берілген ҚҚ-ның Хокинг температурасын энтропия арқылы келесідей жазамыз:

$$T_+ = \frac{8\pi}{(3S_+)^{\frac{1}{3}}(4\pi e^3 + 3S_+)[(3S_+)^{\frac{2}{3}} + 4(4\pi)^{\frac{2}{3}}\alpha]}\left[\frac{1}{l^2}\left(\frac{3S_+}{4\pi}\right)^{\frac{7}{3}} + \left(\frac{3S_+}{4\pi}\right)^{\frac{5}{3}} - e^3\left(\left(\frac{3S_+}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} + 4\alpha\right)\right]. \quad (3.38)$$

Сонымен қатар, шекті радиусты, шекті температураны және шекті температураны иілу нүктелерінде алу үшін келесі қатынастарды қолдануға болады:

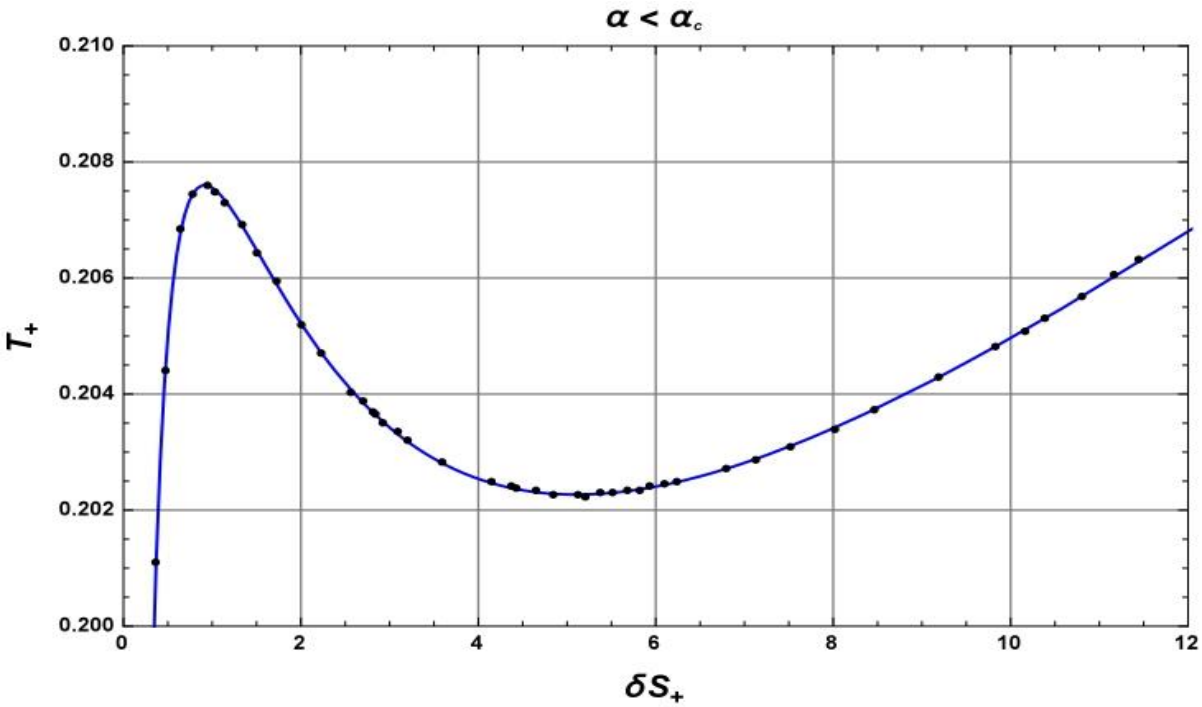
$$\frac{\partial T_+}{\partial S_+} = 0, \quad \frac{\partial^2 T_+}{\partial S_+^2} = 0. \quad (3.39)$$

3.9-суретте жазықтықтағы $T_+ - S_+$ изозарядтар α_c =0.0495 мәнінде бейнеленген.



Сурет 3.9 – Берілген $e = 0.1$ және $\alpha = 0.0495$ параметрлер үшін T_+ ның S_+ тәуелділігі және ГБ шекті мәні

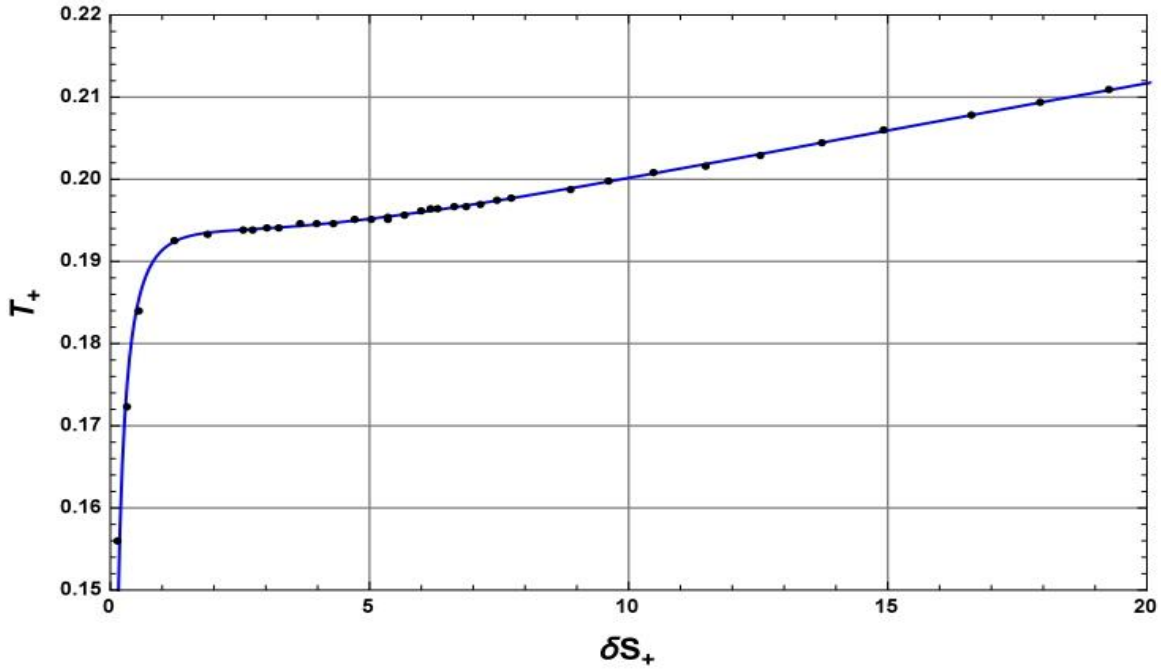
Ескерту – Әдебиет негізінде құралған [179]



(а)

Сурет 3.10 – T_+ ның S_+ ке таңдалған $e = 0.1, l = 1$ $\varphi_0 = 0.35$ және $\varphi_C = 0.0495$ параметрлер бойынша тәуелділігі, парақ 1

Ескерту – Әдебиет негізінде құралған [179]



(ә)

Сурет 3.10, парақ 2

Ескерту – Әдебиет негізінде құралған [179]

AdS/CFT мәліметтері бойынша, Ryu және Takayanagi [190, 191] голографияны есептеудің талғампаз әдісін ұсынды шатысу энтропиясы, ол келесі қатынаспен анықталады:

$$S_+ = \frac{горизонт}{4G}. \tag{3.40}$$

Голографиялық шатысудың энтропиясы келесі түрге ие:

$$S_+ = \pi \int_0^{\phi_0} r^2 \sin^2\phi \sqrt{r^2 + \frac{1}{f(r)}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2}\, d\phi. \tag{3.41}$$

Мұнда келесі шарт $\phi = \phi_0$ шатысудың беті ретінде қарастырылады және ϕ_0 мәндері: $0,35, 0.42, 0.50$.

Сандық нәтиже $r(\phi)$ шекаралық шарттармен алынды $r'(0) = 0$ және $r(0) = r_0$. Шатысу S энтропиясын реттеу үшін төменде біз (3.41) теңдеуге дейін (ол φ_0 жақын) қайтадан біріктіріп және шекарадағы бірдей $r(\phi)$ шатысу бетімен таза AdS (S'_+ белгіленген) шатысу энтропиясы алып тасталды. Мұнда шатысудың сәйкес реттелген энтропиясы көрсетілген $S_+ = S_+ - S'_+$. 3.10- суретте $\alpha = 0.35$ мәнінде T_+ -ның δS_+-ге тәуелділік графигі бейнеленген.

3.10-суретте келтірілген салыстырмалы талдау арқылы шатысу энтропиясы Ван-дер-Ваальс типіндегі фазалық ауысу болып табылатындығы анықталды.

3.7 Қара құрдым сипаттамасының маңызды көрсеткіштері

Бұл бөлімде ҚҚ-дардың сипаттамасының α, β, γ және δ маңызды көрсеткіштері талқыланады. Ван-дер-Ваальс түрінің фазалық ауысуы сәйкесінше η реттік параметрдің жылу сыйымдылығының C_+, изотермиялық сығылудың κ_T және шекті $|P_+ - P_C|_{T_C}$ изотерманың шекті көрсеткіштермен сипатталады. Бұл шамалар келесі формуламен анықталады:

$$C_+ = T_+ \frac{\partial S_+}{\partial T_+} \propto |t|^{-\alpha}, \qquad \eta = V_l - V_s \propto |t|^{\beta}, \tag{3.42}$$

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P_+} \propto |t|^{-\gamma}, \qquad |P_+ - P_C|_{T_C} \propto |V - V_C|^{\delta}, \tag{3.43}$$

Мұнда $t = \frac{T_+ - T_C}{T_C}$, V_l және V_s сәйкесінше үлкен және кіші өлшемді ҚҚ көлемі болып табылады. Әрі қарай келесі анықтамаларды қолдана отырып:

$$p = \frac{P_+}{P_c}, \qquad \tau = \frac{T_+}{T_c} \quad ; \quad \nu = \frac{V}{V_c}, \tag{3.44}$$

Осы мәндерді теңдеуге (3.34) ауыстыра отырып, өлшемсіз параметрлер тұрғысынан күй теңдеуі алынды:

$$p = \frac{1}{\rho_C}\frac{\tau}{\nu} + 8\alpha\frac{1}{\rho_C V_C^2}\frac{\tau}{\nu} - \frac{1}{P_C V_C^2}\frac{1}{2\pi\nu^2} + \frac{1}{V_C^4 P_C}\frac{\alpha + \nu^2}{\pi\nu^4}. \tag{3.45}$$

Критикалық көрсеткіштер заңы X ретінде анықталады делік $p = \frac{1}{\rho_C}\frac{\tau}{\nu} + h(\nu)$, мұнда ρ_c шекті қатынас, ал $h(\nu)$ түзету мүшесі болып табылады. Енді осы теңдеуді келесі шекті нүктелерге жақын кеңейте отырып:

$$\tau = t + 1, \qquad \nu = (1+\omega)^{1/z}, \tag{3.46}$$

мұнда ν және ω мәндерін (3.46) теңдеуге қоя отырып, келесі теңдеу алынды:

$$\frac{1}{\rho_C} + h(1) = 1, \qquad \rho_c h'(1) = 1, \qquad \rho_c h''(1) = -2. \tag{3.47}$$

Критикалық экспоненттерді алу үшін теңдеуді шешіп, күй теңдеуі шекті нүктелерге жақын келесідей болады:

$$p = 1 + A_{10}t + A_{11}t\omega + A_{03}\omega^3 + \mathrm{O}(t\omega^2, \omega^4), \tag{3.48}$$

(3.43) және (3.40) теңдеулерді салыстыра отырып, шекті көрсеткіштердегі коэффициенттерді анықтаймыз:

$$A_{10} = \frac{1}{\rho_C}, \qquad A_{11} = \frac{1}{z\rho_C} \qquad A_{03} = \frac{1}{z^3}\left(-\frac{h^3(1)}{6}\right). \tag{3.49}$$

Кішкентай ҚҚ-дардан үлкенге фазалық ауысу кезінде қысым мен температура тұрақты болып қалады, ал көлем өзгереді. Бұл жағдайда келесі теңдеуді алынады:

$$p = 1 + A_{10}t + a_{11}t\omega_s + A_{03}\omega_s^3 = 1 + A_{10}t + A_{11}t\omega_l + A_{03}\omega_l^3. \tag{3.50}$$

Қысқарту нәтижесінде келесі теңдеу алынды:

$$A_{11}t(\omega_l^2 - \omega_s^2) + A_{03}(\omega_l^3 - \omega_s^3) = 0. \tag{3.51}$$

Сонымен қатар, фазалық ауысу кезінде ол Максвеллдің аудандар заңына бағынады, яғни:

$$\int_{\omega_s}^{\omega_l} \omega dp = A_{11}t(\omega_l^2 - \omega_s^2) + \frac{3}{2}A_{03}(\omega_l^3 - \omega_s^3) = 0. \tag{3.52}$$

Жоғарыда келтірілген теңдеулерді шеше отырып, біз тривиальды емес шешім алынды:

$$\omega_l = -\omega_s = \sqrt{\frac{-A_{11}t}{A_{03}}}. \tag{3.53}$$

Алынған шешімде реттік параметр, изотермиялық сығылу және шектік изотермалардың формасы сәйкесінше:

$$\begin{aligned} &\eta = V_C(\omega_l - \omega_s) = 2V_C\omega_l \propto \sqrt{-t}, \\ &\kappa_T = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P_+}\bigg|_T \propto \frac{1}{P_C}\frac{1}{t}, \\ &p - 1 \propto -\omega^3, \qquad . \end{aligned} \tag{3.54}$$

$t = 0$ мәнінде төрт шектік көрсеткіш $\alpha = 0, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = 1, \delta = 3$ болып табылады, олар орташа өріс теориясына дәл сәйкес келеді.

Сонымен, бұл тарауда бейсызықтық электродинамикамен біріктірілген, модификацияланған ЭГБ гравитациясындағы Бардиннің AdS ҚҚ-ының шешімін алдық. Шешім $e = 0$ [79, p. 104004] Булвер-Дезердің ҚҚ-ын, [80, p. 273-276] $\alpha \to 0$ Бардиннің ҚҚ-ын және Шварцшильд-Тангерилиннің $e = 0$ және $\alpha \to 0$ шектеріндегі ҚҚ-ын интерполяциялайды. Алынған ҚҚ-ның орталық де-Ситтер ядросы бар екендігі анықталды. Көкжиектің құрылымын аналитикалық тұрғыдан шешу өте қиын болғандықтан сандық әдістермен есептеледі. ҚҚ-ның екі көкжиегі бар. Қисықтық скалярлары орталықта сингулярлы емес, бұл алынған шешімнің тұрақтылығын растайды.

Сонымен қатар, температура, энтропия, жылу сыйымдылығы және бос энергияны есептеу арқылы ҚҚ-ның термодинамикасы зерттелді. Бұл ҚҚ термодинамиканың өзгертілген бірінші заңын қанағаттандыратыны анықталды. Жергілікті және жаһандық тұрақтылық Гиббстің жылу сыйымдылығы мен бос энергия диаграммасын зерттеу арқылы жүзеге асты. Бұл ҚҚ шешімі үшін фазалық ауысу және шектік нүктелер де табылды. Ақырында, мұнда есептелген критикалық көрсеткіштер орта өріс теориясына толық сәйкес келетінін анықталды [179, 192].

4 БАРДИН-ЯНГ-МИЛЛС ҚАРА ҚҰРДЫМЫНЫҢ ТЕРМОДИНАМИКАЛЫҚ ҚҰРЫЛЫМЫ

Бұл тарауда Эйнштейн өрісінің теңдеуі Максвелл және Янг-Миллс өрісінің қатысуымен бейсызықтық электродинамика арқылы шешіледі. А .Эйнштейн ЖСТ бойынша, бұл тамаша жетістіктің тарихы үлкен табыспен басталды, өйткені теория шешілмеген мәселелерді түсіндіруге көмектесті және жаңа бақылау болжамдары жасалды. Шынында да, Эйнштейн Меркурийдің перигелиінің прецессиясын, гравитациялық қызыл ығысуын және жарықтың ауытқуын және космологиялық тұрақты мәселе ретінде белгілі кейбір сұрақтарды, иерархия мәселесін, Ғаламның кеш үдеуін түсіндірді, бірақ КМ мен КЭ әлі де жауапсыз қалады [193]. Бұл ЖСТ толық теория емес екенін білдіреді және жауапсыз мәселелерді шешу үшін бізге көбірек жалпы теориялар қажет.

Алынған шешім көкжиегі бар ҚҚ-ның сингулярлығы жоқ шешімі болып табылады. Бұл шешім Бардиннің ҚҚ-ы мен Шварцшильд шешімінің жалпыланған нұсқасы болып табылады. Сонымен қатар, Янг-Миллс өрісіне және бейсызықтық электродинамикаға тәуелді масса, температура және жылу сыйымдылығы сияқты термодинамикалық шамалары зерттелді. Есептеу барысында анықталғаны, фазалық ауысу максималды температурада жүреді.

Дж.М. Бардин, А.Д. Сахаров пен Э.Б. Глинер [194] және 30 жылдан кейін Э. Айон-Беато және А. Гарсия [195]. Бейсызықтық электродинамикамен байланысты дәл ҚҚ шешімін береді. Бардин моделіне негізделген көптеген ҚҚ шешімдері бар [116, p. 241-248; 118, p. 174; 120, p. 635-640; 121, p. 149-151; 124, p. 044005; 189, p. R3427; 190, p. 181602; 191, p. 045; 192, p. 310-316; 193, p. 57-69; 194, p. 378-381; 195, p. 629-632]. және ЭГБ-нің жалпыланған гравитация (EGB) [196-199], айналмалы ҚҚ [104, p. 25-47], үлкен гравитация [2008], жоғары өлшемді ҚҚ [201] және ЭГБ төрт өлшемді гравитация [140, p. 100730]. Термодинамика P-V және шекті және Ван-дер-Ваальс тұрақты ҚҚ-дардың фазалық ауысулары жұмыстарда [202] зерттелген. Бұл жұмыстың мақсаты-Эйнштейн теңдеуінің ҚҚ шешімін бейсызықтық электродинамикамен бірге Янг-Миллс өрісінің қатысуымен алу.

Бардин-Янг-Миллс ҚҚ-дары ЖСТ аясында зерттелетін теориялық обьектілер,олар Янг-Миллс өрісімен айланысқан және Бардиннің регулярлы ҚҚ-ы концепциясына негізделген.Бұл ҚҚ-дар регулярлы және Янг-Миллс өрісінің әсерімен сипаталады.Олардың термодинамикалық құрылымы ҚҚ физикасында маңызды роль атқарады.

Бардин-Янг-Миллс ҚҚ-ы ЖСТ аясында Янг-Миллс өрістерімен (немесе калибрлік өрістермен) өзара әсерлесетін ҚҚ-ның теориялық моделі. Янг-Миллс өрістері-элементар бөлшектер физикасындағы фундаменталды өзара әсерлесулерді (мысалы күшті және әлсіз ядролық өзара әсерлесулер) сипаттайтын калибрлік инвариантты өрістер. Бардин-Янг-Миллс ҚҚ-ын алғаш рет 1968 жылы Джеймс Бардин тарапынан ұсынылған және кейіннен Янг-Миллс өрістерінің контексінде зерттелген.Бұл модель стандартты Шварцшильд немесе Керр ҚҚ-дарынан ерекшеленеді, өйткені ол сингулярлықтың

болмауымен және өріс теориясына тән қосымша еркінді дәрежелерімен сипатталады.

Бардин ҚҚ-ы сингулярлы емес ҚҚ-ның алғашқы моделі болып табылады. Оның метрикасы Шварцшильд метрикасына ұқсас болғанымен, орталық сингулярлықты болдырмау үшін масса функциясы өзгертілген. Янг-Миллс өрістерінің қосылуы ҚҚ-дардың кеңістік- уақыт гравитациялық өрісінің қасиеттерін күрделі етеді. Математикалық тұрғыдан Бардин-Янг-Миллс ҚҚ-ы Эйнштейн-Янг-Миллс теңдеулерінің шешімі ретінде сипатталады, мұнда гравитациялық өріс және калибрлік өріс біріктіріледі.

Бардин-Янг-Миллс ҚҚ-ының негізгі сипаттамалары:

1. Сингулярлықсыз. Бардин моделінің басты ерекшелігі-орталық сингулярлықтың болмауы.Оның орнына кеңістік уақыттың қисықтығы шекті мәндерге ие болады.

2. Янг-Миллс өрістері: Калибрлік өрістер ҚҚ-ның энергетикалық-импульстік тензорына әсер етіп, оның физикалық қасиетін өзгертеді.

3. Оқиға көкжиегі: Бардин-Янг-Миллс ҚҚ-ының оқиға көкжиегі Шварцшильд радиусына ұқсас, бірақ Янг-Миллс өрістерінің әсерінен модификацияланады.

4. Массалық параметрлер: Массаның таралу функциясы сингулярлықты жою үшін реттеледі, бұл модельді физикалық тұрғыда реалистік етеді.

1968 жылы Джеймс Бардин ұсынған регулярлы ҚҚ моделінде сингулярлық жойылған, яғни кеңістік уақыт орталығында тығыздық шексіз болмайды.Ол массасы және магниттік заряды бар ҚҚ-ды сипаттайды.

Янг-Миллс өрісі – электромагниттік өрістің жалпылама нұсқасы болып табылатын калибрлік өріс. Бардин-Янг-Миллс ҚҚ-дары осы өрістің әсерінен кеңістік уақыттың геометриясын өзгертеді. ҚҚ үшін алынған шешім сингулярлық емес, тұрақты екенін және көкжиегі бар Бардин-Янг-Миллстің ҚҚ-ы деп аталатынын ескерілді. Сонымен қатар, алынған шешімнің көкжиек құрылымы мен термодинамикасын зерттеп, бұл жағдайда ҚҚ бейсызықтық электродинамика қатысуымен Бекенштейн-Хокинг аудандарының заңын бұзатынын көрсетті.

4.1 Әсер және қозғалыс теңдеулері

Янг-Миллс өрісі қатысуымен бейсызықтық электродинамикаға байланысты гравитацияны сипаттайтын әсер [140, p. 100730], келесі түрде берілген:

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}[R - 2\Lambda - F_{YM} - L(F)] \tag{4.1}$$

мұнда R - Риччи скаляры, ал Λ - космологиялық тұрақты.

$F_{YM} = Tr(F^{(a)}_{\mu\nu}F^{(a)\mu\nu})$ - Янг-Миллс инварианты

$F^{(a)}_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\mu}A^{(a)}_{\nu]} + f^{(a)}_{(b)(c)}$ электромагниттік өріс тензоры, ал $L(F)$ Бардин лагранжианы (Singh D.V. et al., 2017), келесі түрде беріледі

$$\mathsf{L}(F) = \frac{3}{2sg^2}\left(\frac{\sqrt{2g^2F}}{1+\sqrt{2g^2F}}\right)^{\frac{5}{2}}, \tag{4.2}$$

мұнда $s = g/2M$, M масса параметрі және g магниттік заряд. Ғарыштық уақыттың сфералық симметриялы статикалық метрикасын анықтайтын келесі сызықтық элемент қарастырылды:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{4.3}$$

Метрикалық тензор мен электромагниттік потенциалға қатысты әсердің (1) өзгеруіндегі өріс теңдеулері (A_μ) және Неабелев өрісі келесі теңдеуге әкеледі:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = T^M_{\mu\nu} + T^{YM}_{\mu\nu}, \tag{4.4}$$

$$\nabla_\mu\left(\frac{\partial L(F)}{\partial F}F^{\mu\nu}\right) = 0, \quad \text{и} \quad \nabla_\mu(^*F^{\mu\nu}) = 0, \tag{4.5}$$

$$D_\mu F^{(a)\mu\nu} = 0. \tag{4.6}$$

Мұнда $T^M_{\mu\nu}$ және $T^{YM}_{\mu\nu}$ - Максвеллдің энергия-импульс тензоры (ЭИТ), келесі түрде болады:

$$\begin{aligned} T^M_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}L(F) - 2\frac{\partial \mathsf{L}(F)}{\partial F}F_{\mu\rho}F^\rho_\nu, \\ T^{YM}_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}F^{(a)}_{\mu\nu}F^{(a)\mu\nu} + 2F^{(a)}_{\mu\nu}F^{(a)\mu\nu}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Максвелл өрісінің нөлдік емес компоненті $F_{\theta\phi} = g\sin\theta$ потенциалы Янг-Миллс өрісімен бірге $F^{(a)}_{\theta\phi} = \nu\sin\theta$ (3) және (4) теңдеулерді пайдалана отырып, (6) теңдеудің (r,r) компоненті келесі теңдеумен анықталады:

$$m'(r) - \frac{\nu}{r^2} = \frac{6Mr^2g^2}{(r^2+g^2)^{5/2}}, \tag{4.8}$$

мұнда штрих r бойынша алынған туынды. (8) теңдеуді $r \to \infty$ шегі бойынша интегралдап, (6) теңдеуге (3) теңдеудегі $m(r)$ мәнін қойып, $f(r)$ түріндегі келесі теңдеу алынды:

$$f(r) = 1 - \frac{2Mr^2}{(r^2 + g^2)^{3/2}} + \frac{\nu}{r^2}, \tag{4.9}$$

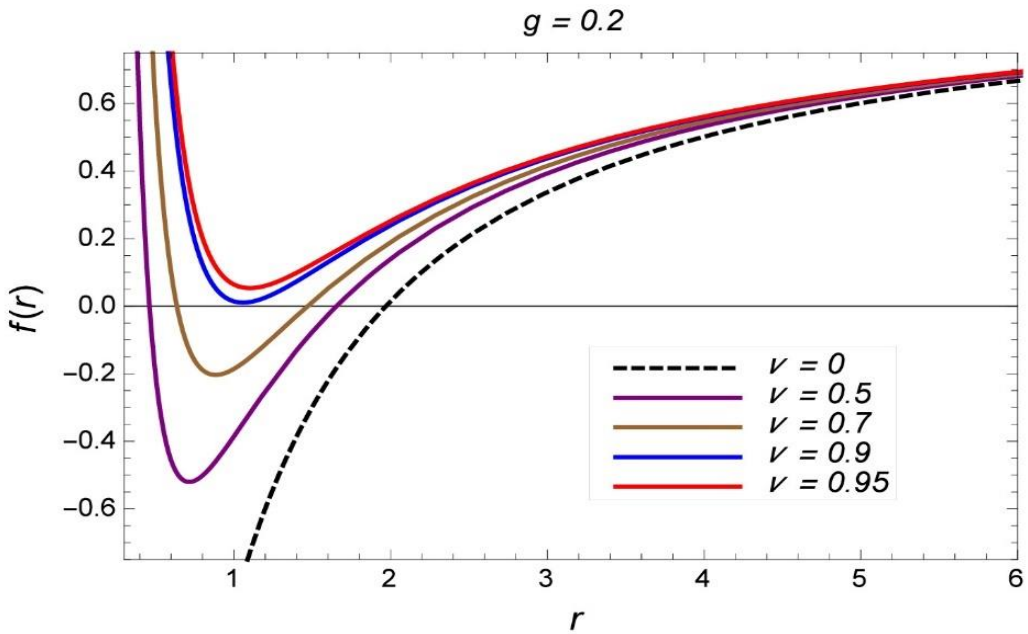
Бұл шешім Бардин-Янг-Миллстің ҚҚ-ын сипаттайды және M массасымен, ν параметрімен және магниттік g зарядымен сипатталады . Магниттік g зарядтың жоғалу шегінде бұл ҚҚ шешімі Янг-Миллс ҚҚ-ымен интерполяцияланады.

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{\nu}{r^2}, \tag{4.10}$$

Егер $\nu = 0$ онда Бардиннің ҚҚ-ына айналады (Fernando S., 2017), ал егер $g = 0$ - Шварцшильд ҚҚ-ы болады.

Бардин-Ян-Миллс ҚҚ-ы көкжиегінің графиктік көрінісі 4.1-суретте көрсетілген [203]

.



Сурет 4.1 – Белгіленген масса $M = 1$ мәніндегі ν параметрінің әртүрлі мәндеріне $f(r)$ тәуелділігі

Ескерту – Қара пунктир сызық Шварцшильд ҚҚ-ы графигін көрсетеді

ҚҚ-ның екі көкжиегі бар, ол Шварцшильдтің ҚҚ-ынан айырмашылығы бар, бірақ Бардиннің ҚҚ-ына ұқсайды. ҚҚ көкжиегінің өлшемі параметр ν ұлғайған сайын кішірейеді, ал $\nu > 0.90$ ҚҚ көкжиегі болмайды.

4.2 Бардин-Янг-Миллс қара құрдымының шешімі

Бұл бөлімде термодинамикалық шешімдер қарастырылды. Көкжиек радиусы $f(r_+)=0$ тұрғысынан анықталатын ҚҚ-ның массасын есептеуден бастайық. Бардин-Янг-Миллстің ҚҚ-ының массасы келесідей

$$M_+ = \frac{(r_+ + g^2)^{3/2}}{2r_+^2}\left(1+\frac{\nu}{r_+^2}\right), \tag{4.11}$$

Бұл масса (11) Бардиннің ҚҚ тобына, $\nu=0$ шегінде Янг-Миллс ҚҚ-ы массасына $g=0$ және $\nu=0$ екі параметр болмаған кезде Шварцшильд ҚҚ-ының массасына дейін өзгереді.

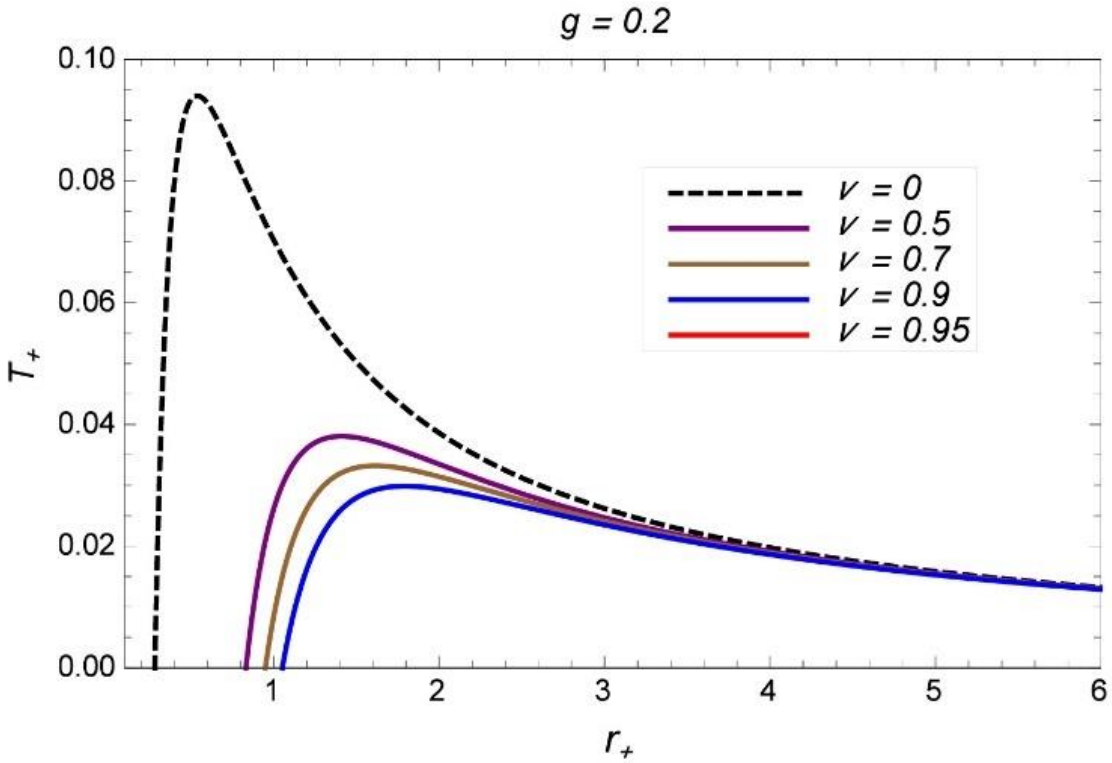
ҚҚ сәуле шығаратындықтан температура $T=\kappa/2\pi$. Бұл ҚҚ-ының Хокинг температурасын келесі теңдеумен анықтауға болады, к-сәйкес анықталған гравитация:

$$\kappa = \frac{1}{2}\frac{\partial\sqrt{-g^{rr}g_{tt}}}{\partial r}\Big|_{r=r_+} = \frac{1}{2}\frac{df(r)}{dr}\Big|_{r=r_+}. \tag{4.12}$$

Енді Хокинг температурасының анықтамасын және метрикалық функцияның (9) формуласын (12) қолдана отырып, Лавлок - AdS массивтік ҚҚ-ының температурасы келесідей күйде болады

$$T_+ = \frac{1}{4\pi r_+}\left(\frac{r_+^2-\nu-\frac{2g^2}{r_+^2}(r_+^2+2\nu)}{r_+^2+g^2}\right), \tag{4.13}$$

4.2-суретте [203] ν параметрінің жоғарылауымен температура төмендейтінін және магниттік монополия g зарядының жоғарылауымен артатынын көруге болады. Бардин-Янг-Миллстің ҚҚ-ының температурасы ν параметріне және магниттік монополияның g зарядына байланысты өзгереді. Температура төмендегенде $T_+ = 1/2\pi r_+$ параметрсіз ν және магнит g зарядынсыз төмендейді:



Сурет 4.2 – Белгіленген масса $M = 1$ мәніндегі ν параметрінің әртүрлі мәндері үшін температураның T_+ көкжиек радиусына r_+ тәуелділік графигі

ҚҚ энтропиясын термодинамиканың бірінші заңы бойынша анықтауға болады: $dM_+ = T_+ dS_+$ бұдан

$$S_+ = \pi\left(\frac{r_+^2 - 2g^2}{r_+}\sqrt{r_+^2 + g^2} + 3g^2 Log(r_+ + \sqrt{r_+^2 + g^2})\right). \tag{4.14}$$

Бұл Бардин-Янг-Миллс ҚҚ-ының энтропиясы, ол аудан заңын бұзады және магниттік $g = 0$ заряд болмаған кезде Бекенштейн-Хокинг аудан заңына бағынады.

Енді жылу сыйымдылығының сипаттамасымен байланысты пайда болған ҚҚ-ның термодинамикалық тұрақтылығын зерттеледі. Оң жылу сыйымдылығы үшін $(C_+ > 0)$ жүйенің тұрақты екенін айтады; дегенмен, теріс жылу сыйымдылығы $(C_+ < 0)$ ҚҚ-ның тұрақсыз күйде екенін көрсетеді. Жылу сыйымдылығы келесі өрнек арқылы анықталады [203].

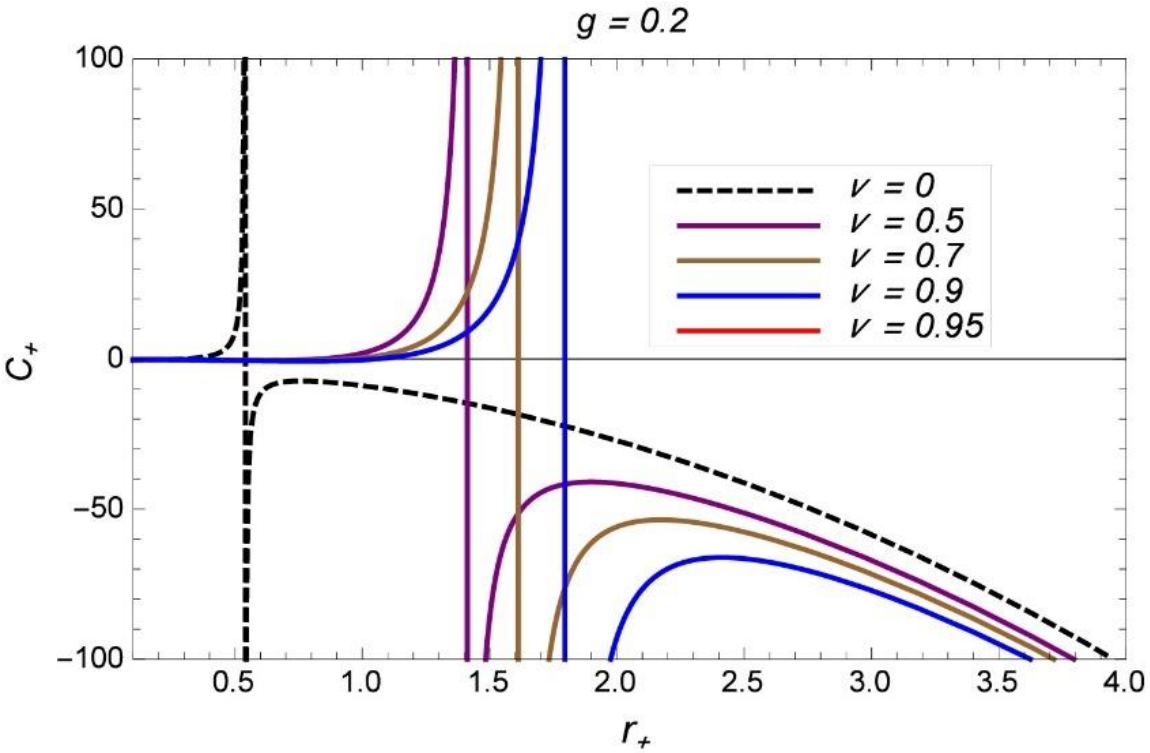
$$C_+ = \frac{\partial M_+}{\partial T_+} = (\frac{\partial M_+}{\partial r_+})(\frac{\partial T_+}{\partial r_+})^{-1} \tag{4.15}$$

Әрі қарай, Бардин-Янг-Миллстің жылу сыйымдылығын (4.13) теңдеуді және (4.14) теңдеуді (4.15) теңдеуге ауыстыру арқылы табылды. Содан кейін жылу сыйымдылығы қорытып шығарылды:

$$C_+ = -\frac{2\pi(r_+^2+g^2)^{5/2}(r_+^4 - r_+^2\nu + 2g^2(r_+^2+2\nu))}{r_+^7 - 3r_+^5\nu - 2g^2 r_+(r_+^2+6) - 7g^2 r_+^3(r_+^2+3\nu)} \tag{4.16}$$

Бардин-Янг-Миллстің ҚҚ-ының жылу сыйымдылығы (16) және ол Бардиннің ҚҚ-ына $\nu = 0$ дейін төмендейді.

4.3-суретте ν параметрдің әртүрлі мәндерінде магниттік $g = 0.2$ зарядтың тұрақты мәні кезіндегі жылу сыйымдылығының радиусқа тәуелділігінің графигі көрсетілген.



Сурет 4.3 – Бекітілген магниттік заряд $g = 0.2$ мәніндегі ν параметрінің әртүрлі мәндері үшін жылу сыйымдылығының C_+ көкжиек радиусына r_+ тәуелділігі

4.3-сурет ҚҚ-дар үшін тұрақты және тұрақсыз күй арасында фазалық ауысу бар екенін көрсетеді. ҚҚ температура максималды болған кезде фазалық ауысуды көрсетеді, ал жылу сыйымдылығы алшақтықты көрсетеді (4.2, 4.3-суреттер).

Бардин-Янг-Миллс ҚҚ-дарының термодинамикалық құрылымдары: регулярлық, яғни сингулярлықтың болмауы, бұл стандартты ҚҚ-дардан ерекшелендіреді. Температурасы зарядқа және көкжиек радиусына тәуелді. Энтропиясы оқиға көкжиегінің ауданына пропорционал және химиялық потенциалы Янг-Миллс өрісінің зарядымен байланысты [203 p. 1750082].

ҚОРЫТЫНДЫ

Диссертациялық жұмыста қазіргі космология мен модификацияланған гравитация теориялары шеңберінде ғаламның эволюциялық сценарийлері және сингулярлықтан арылған ҚҚ кешенді түрде зерттелді. Зерттеу автордың жарияланған мақалаларына негізделіп, аналитикалық әдістерді, сандық модельдеуді және бақылау деректерімен салыстыруды үйлестіре отырып жүзеге асырылды.

Космологиялық бөлімде масштабтық фактордың экспоненциалды-периодтық түрде өзгеретін QSSC модель жан-жақты талданды. Көрсетілген модельдің динамикасы тұжырымдамалық тұрғыдан тиімді фантомдық тәрізді күй теңдеуін туындатып, Хаббл тұрақтысының мәндері арасындағы келіспеушілікті (Хаббл шиеленісін) феноменологиялық түрде азайту мүмкіндігін көрсетеді. OHD, Pantheon (Sn Ia) және BAO деректері негізінде жүргізілген MCMC талдауы модельдің бақылаулармен 1σ деңгейінде үйлесетіндігін растады.

Екінші бөлімде RN-AdS_5 BH көлеңкесі аналитикалық және сандық тәсілдер арқылы зерттелді. Фотондық сфера мен көлеңке радиустарының дәл өрнектері алынған және олардың зарядқа, космологиялық тұрақтыға және плазмалық орта параметрлеріне тәуелділігі анықталды. Вакуум жағдайында заряд пен Λ өсімі көлеңке радиусын кемітеді, плазмалық ортада плазма коэффициенті өскен сайын көлеңке радиусының өсетіні байқалады. Нәтижелер *M87** пен *Sgr A** нысандарының EHT бақылауларымен сапалық түрде сәйкес келеді.

Үшінші бөлімде ЭГБ гравитациясында бейсызық электродинамикамен байланысқан Бардин типті сингулярлықсыз шешім алынған. Қисықтық инварианттарының барлық аймақта шекті болуы алынған шешімнің сингулярлықтан толық арылғанын көрсетеді. Кеңейтілген фазалық кеңістіктегі термодинамикалық талдау жүйеде Ван-дер-Ваальс типті фазалық ауысулардың және критикалық нүктенің болатынын анықтады. Алынған критикалық көрсеткіштердің орташа өріс теориясының әмбебап мәндерімен сәйкестігі шешімнің термодинамикалық сипаттарының біртектілігі мен тұрақтылығын айғақтайды.

Төртінші бөлімде Бардин-Янг-Миллс үлгісінің жалпыланған тұрақты шешімі алынған. Бұл шешім статикалық, сфералық-симметриялы және сингулярлықсыз метрика ретінде бірнеше классикалық шектеулерді (Бардин, Янг-Миллс, Шварцшильд) қалпына келтіреді. Термодинамикалық сипаттамалардың бейсызықтық электродинамика және неабелдік калибрлік өрістер параметрлеріне тәуелділігі анықталды; сондай-ақ энтропияның Бекенштейн-Хокинг аудан заңының бейсызықтық салдарынан модификациялануы және фазалық ауысулардың максималды температурамен байланысы көрсетілді.

Жалпы алғанда, жұмыстың нәтижелері модификацияланған гравитация теорияларында сингулярлы емес ҚҚ шешімдерінің класын кеңейтеді, тербелмелі космологиялық сценарийлердің бақылаулармен үйлесімділігін

көрсете отырып, ҚҚ-дардың геометриялық-термодинамикалық зерттеулеріне жаңа бағыттар ашады. Қойылған ғылыми-зерттеу мақсаттары мен міндеттері орындалды; алынған нәтижелер теориялық зерттеулерді әрі қарай дамытуға, сондай-ақ көпөлшемді және бейсызық модельдерді астрономиялық бақылаулармен сәйкестендіруге мүмкіндік береді.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 Riess A.G. et al. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant // The Astronomical Journal. – 1998. – Vol. 116, Issue 3. – P. 1009-1009-64.

2 Perlmutter S. et al. Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae // The Astrophysical Journal. – 1999. – Vol. 517, Issue 2. – P. 565-586.

3 Copeland E.J., Sami M., Tsujikawa S. Dynamics of dark energy // International J of modern Physics D. – 2006. – Vol. 15, Issue 11. – P. 1753-1935.

4 Amendola L., Tsujikawa S. Dark energy: theory and observations. – Cambridge, 2010. – 503 p.

5 Aghanim N. et al. Planck 2018 results // Astronomy and Astrophysics. – 2020. – Vol. 641. – P A.1-1-A.1-56.

6 Sami M. Models of dark energy // Lecture Notes in Physics. – 2007. – Vol. 720. – P. 219-256.

7 Sami M., Myrzakulov R. Cosmological relevance of scaling solutions: A recipe for quintessential inflation // General Relativity and Gravity. – 2022. – Vol. 54. – P. 86-1-86-15.

8 Riess A.G. et al. A Comprehensive Measurement of the Local Value of the Hubble Constant with 1 km s^{-1} Mpc^{-1} Uncertainty from the Hubble Space Telescope and the SHOES Team // The Astrophysical Journal Letters. – 2022. – Vol. 934, Issue 1. – P. L7-1-L7-52.

9 Berezhiani L., Khoury J., Wang J. Shedding light on the small-scale crisis with CMB spectral distortions // Physical Review D. – 2017. – Vol. 95, Issue 12. – P. 121302.

10 Poulin V., Smith T.L., Karwal T. et al. Early Dark Energy can Resolve the Hubble Tension // Physical Review Letters. – 2019. – Vol. 122. – P. 221301.

11 Valentino E.D., Linder V.E., Melchiorri A. Vaciim phase transition solves the H_0 tension // Physical Review D. – 2017. – Vol. 97. – P. 043528.

12 Adil S.A., Gangopadhyay M.R., Sami M. et al. Late time acceleration due to generic modification of gravity and Hubble tension // Physical Review D. – 2021. – Vol. 104. – P. 103521.

13 Sola J., Valent A.G., Perez J.C. et al. Brans-Dicke Gravity with a Cosmological Constant Smoothes OuT ΛCDM Tensions // The Astrophysical Journal Letters. – 2019. – Vol. 886, Issue 1. – P. L6-1-L6-6.

14 Zumalacarregui M. Gravity in the era of equality: Towards solutions to the Hubble problem without fine-tuned initial conditions // Physical Review D. – 2020. – Vol. 102. – P. 023523.

15 Ballardini M., Braglia M., Finelli F. et al. Scalar-tensor theories of gravity, neutrino physics, and the H_0 tension // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2020. – Vol. 2020, Issue 10. – P. 044-1-044-30.

16 Braglia M., Ballardini M., Finelli F. et al. Early modified gravity in light of the tension and LSS data // Physical Review D. – 2021. – Vol. 103. – P. 043528.

17 Umilta C., Ballardini M., Finelli F. et al. CMB and BAO constrains for an induced gravity dark energy model with a quartic potential // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2015. – Vol. 2015, Issue 8. – P. 017-1-017-14.

18 Ballardini M., Finelli F., Umilta C. et al. Cosmological constants on induced gravity dark energy models // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2016. – Vol. 2016, Issue 5. – P. 067-1-067-16.

19 Hoyle F., Burbidge G., Narlikar J.V. A Quasi-Steady Cosmological Model with Creation of Matter // Astrophysical Journal. – 1993. – Vol. 410, Issue 2. – P. 437-457.

20 Hoyle F., Burbidge G., Narlikar J.V. Astrophysical deductions from the quasi-steady-state cosmology // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 1993. – Vol. 267, Issue 4. – P. 1007-1019.

21 Hoyle F., Burbidge G., Narlikar J.V. Further astrophysical quantities expected in a quasi-steady state Universe // Astronomy and Astrophysics. – 1994. – Vol. 289, Issue 3. – P. 729-739.

22 Boshkayev K., Konysbayev T., Kurmanov Y., Luongo O., Muccino M., et al.,Luminosity of accretion disks around rotating regular black holes // The European Physical Journal C. – 2024. – Vol. 84. – P. 230.

23 Wu S., Liu C., Thermodynamics of a quantum corrected Schwarzschild black hole in AdS spacetime // Nuclear Physics B. . – 2022. – Vol. 985. – P. 115987.

24 Hoyle F., Burbidge G., Narlikar J.V. Light nuclei in the quasi-steady state cosmological model // The Light Element Abundances: proceed. conf. of The ESO-EPIC Workshop held in Elba. – Berlin, 1995. – P. 21-30.

25 Burbidge G., Hoyle F. The Origin of Helium and the Other Light Elements // The Astrophysical Journal. – 1998. – Vol. 509, Issue 1. – P. L1-L3.

26 Narlikar J.V., Wickramasinghe N.C., Sachs R. et al. Cosmic iron whiskers: their origin, length distribution and astrophysical consequences // International Journal of Modern Physics. – 1997. – Vol. 6, Issue 2. – P. 125-142.

27 Nayeri A., Engineer S., Narlikar J.V. Structure Formation in the Quasi-Steady State Cosmology: A Toy Model // The Astrophysical Journal. – 1999. – Vol. 525. – P. 10-16.

28 Banerjee S.K., Narlikar J.V. The quasi-steady-state cosmology: a study of angular size against redshift // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 1999. – Vol. 307, Issue 1. – P. 73-78.

29 Banerjee S.K., Narlikar J.V., Wickramasinghe N.C. et al. Possible Interpretations of the Magnitude-Redshift Relation for Supernovae of Type Ia // The Astronomical Journal. – 2000. – Vol. 119, Issue 6. – P. 2583-2588.

30 Banerjee S.K., Narlikar J.V. The Quasi-Steady State Cosmology: A Problem of Stability // The Astrophysical J. – 1997. – Vol. 487, Issue 1. – P. 69-72.

31 Narlikar J.V. The quasi-steady state cosmology: Theory and observation // Indian Academy of Science. – 1999. – Vol. 53, Issue 6. – P. 1093-1104.

32 Narlikar J.V., Vishwakarma R.G., Burbidge G. et al. Small scale fluctuations of the microwave background in the quasi-steady state cosmology // https://arxiv.org/abs/astro-ph/0101551. 10.02.2025.

33 Narlikar J.V., Vishwakarma R.G., Burbidge G. Interpretation of the accelerating universe // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. – 2002. – Vol. 114, Issue 800. – P. 1092-1-1092-13.

34 Narlikar J.V., Vishwakarma R.G., Hajian A. et al. Inhomogeneities in the microwave background radiation interpreted within the framework of the quasisteady state cosmology // The Astrophysical Journal. – 2003. – Vol. 585. – P. 1-28.

35 Narlikar J.V. The Quasi steady state cosmology // Chaos, Solitons and Fractals. – 2003. – Vol. 16, Issue 4. – P. 469-477.

36 Narlikar J.V., Burbidge G., Vishwakarma R.G. Cosmology and cosmogony in a cyclic universe // Journal of Astrophysics and Astronomy. – 2007. – Vol. 28. – P. 67-99.

37 Vishwakarma R.G., Narlikar J.V. A critique of supernova data analysis in cosmology // Research in Astronomy and Astrophysics. – 2010. – Vol. 10, Issue 12. – P. 1195-1-1195-5.

38 Narlikar J.V., Dhurandhar S.V., Vishwakarma R.G. et al. Gravitational Wave Background in the Quasi-Steady State Cosmology // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2015. – Vol. 451, Issue 2. – P. 1390-1395.

39 Vikman A. Can dark energy evolve to the phantom? // Physical Review D. – 2005. – Vol. 71. – P. 023515.

40 Charvon S.V., Fomin I.V., Pozdeeva E.O. et al. Superpotential method for chiral cosmological models connected with modified gravity // Physical Review D. – 2019. – Vol. 100. – P. 0635522.

41 Setare M.R., Saridakis E.N. Quintom dark energy models with nearly flat potentials // Physical Review D. – 2009. – Vol. 79. – P. 043005.

42 Mishra S., Chakraborty S. Dynamical system analysis of quintom dark energy model // The European Physical Journal C. – 2018. – Vol. 78, Issue 11. – P. 917-1-917-9.

43 Leon G., Paliathanasis A., Morales-Martinez J.L. The past and future dynamics of quintom dark energy models // The European Physical Journal C. – 2018. – Vol. 78, Issue 9. – P. 753-1-753-22.

44 Boisseau B., Esposito-Farese G., Polarski D. et al. Reconstruction of a scalar-tensor theory of gravity in an accelerating universe // Physical Review Letters. – 2000. – Vol. 85. – P. 2236-2239.

45 Sahni V., Starobinsky A.A. Reconstructing dark energy // International Journal of Modern Physics D. – 2006. – Vol. 15, Issue 12. – P. 2105-2132.

46 Sharma M.K., Pacif S K J., Yergaliyeva G., Yesmakhanova K. The oscillatory universe, phantom crossing and the Hubble tension // Annals of Physics. – 2023. – Vol. 5. – P169345.

47 Riess A.G. et al. Type Ia Supernova distances at redshift >1.5 from the Hubble Space Telescope multi-cycle treasure programs: the early expansion rate // The Astrophysical Journal. – 2018. – Vol. 853, Issue 2. – P. 126.

48 Scolnic D.M. et al. The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed SNe Ia from Pan-STARRS1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample // The Astrophysical Journal. – 2018. – Vol. 859, Issue 2. – P. 101-1-101-37.

49 Valent A.G., Amendola L. H_0 from cosmic chronometers and type Ia supernovae, with Gaussian Processes and the novel Weighted polynomial regression method // Journal of Cosmology and Astroparcle Physics. – 2018. – Vol. 2018, Issue 4. – P. 051.

50 Moresco M. et al. A 6% measurement of the Hubble parameter at z~0.45: direct evidence of the epoch of cosmic re-acceleration // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2016. – Vol. 2016, Issue 5. – P. 014-1-014-30.

51 Efstathiou G.E. To H_0 or not to H_0? Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2021. – Vol. 505, Issue 3. – P. 3866-3872.

52 Camarena D., Marra V. On the use of the local prior on the absolute magnitude of type Ia supernovae in cosmological inference // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2021. – Vol. 504, Issue 4. – P. 5164-5171.

53 Spergel D.N., Bolte M., Freedman W. The age of the universe // Proceedings of the National Academy of Sciences. – 1997. – Vol. 94, Issue 13. – P. 6579-6584.

54 Dunlop J. et al. A 3.5 Gyr-old galaxy at redshift 1.55 // Nature. – 1996. – Vol. 381. – P. 581-584.

55 Damjanov I. et al. Red nuggets at z~1.5: Compact passive galaxies and the formation of the kormendy relation // The Astropysical Journal. – 2009. – Vol. 695, Issue 1. – P. 101-1-101-25.

56 Salaris M. et al. The age of the oldest globular clusters // The Astrophysical Journal. – 1997. – Vol. 479, Issue 2. – P. 665-1-665-9.

57 Bromley B.C., Melia F., Liu S. Polarimetric Imaging of the Massive Black Hole at the Galactic Center // The Astrophysical Journal. – 2001. – Vol. 555, Issue 2. – P. L83-L86.

58 Hioki K., Maeda K.I. Measurement of the Kerr spin parameter by observation of a compact object's shadow // Physical Review D. – 2009. – Vol. 80. – P. 024042.

59 Akiyama K. et al. First Sagittarius A^* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way // The Astrophysical Journal Letters. 2022. – Vol. 930, Issue 2. – P. L12-1-L12-21.

60 Bardeen J.M. Black hole // Procced. 23rd session of the Summer School of Les Houches. – Grenoble (France), 1972. – P. 241.

61 Luminet J.P. Inage of a Spherical Black Hole with Thin Accretion Disk // Astronomy and Astrophysics. 1978. – Vol. 75. – P. 228-235.

62 Synge J.L. The Escape of Photons from Gravitationally Intense Stars // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 1966. – Vol. 131, Issue 3. – P. 463-466.

63 Falcke H. et al. Viewing the Shadow of the Black Hole at the Galactic Center // The Astrophysical Journal. – 2020. – Vol. 528, Issue 1. – P. L13-1-L13-6.

64 Chandrasekhar S. The Mathematical Theory of Black Holes. – NY.: Oxford Universe Press, 1998. – 672 p.

65 Bozza V., Scarpetta G. Strong deflection limit of black hole gravitational lensing with arbitrary source distances // Physical Review D. – 2007. – Vol. 76. – P. 083008.

66 Zakharov A.F., De Paolis F., Ingrosso G., Nucita A.A. Direct measurements of black hole charge with future astrometrical missions // Astronomy and Astrophysics. – 2005. – Vol. 442, Issue 3. – P. 795-799.

67 De Paolis F., Ingrosso G., Nucita A.A., Qadir A., Zakharov A.F. Estimating the parameters of the $Sgr\ A^*$ black hole. – 2011. Vol. 43. – P. 977-988.

68 Bambi C., Freese K. Apparent shape of super-spinning black holes // Physical Review D. – 2009. – Vol. 79. – P. 043002.

69 Nedkova P.G., Tinchev V.K., Yazadjiev S.S. Physical Review D. – 2013. – Vol. 88. – P. 124019.

70 Bozza V. Gravitational lensing by black holes // General Relativity and Gravitation. – 2010. – Vol. 42. – P. 2269-2300.

71 Ohanian H.C. The black hole as a gravitational lens // American Journal of Physics. – 1987. – Vol. 55. – P. 428-432.

72 Bozza V., Capozziello S., Iovane G., Scarpetta G. Strong Field Limit of Black Hole Gravitational Lensing // General Relativity and Gravitation. – 2001. – Vol. 33. – P. 1535-1548.

73 Darwin C. The gravity field of a particle // Proccedings of the Royal Society A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 1959. – Vol. 249, Issue 1257. – P. 180-194.

74 Grenzebach A., Perlick V., Lammerzahl C. Photon regions and shadows of Kerr-Newman-NUT black holes with a cosmological constant // Physical Review D. – 2014. – Vol. 89. – P. 124004.

75 Bozza V. Gravitational lensing in the strong field limit // Physical Review D. – 2002. – Vol. 66. – P. 103001.

76 Kraniotis G.V. Gravitational lensing and frame dragging of light in the Kerr-Newman and Kerr-Newman (anti) de Sitter black hole spacetime // General Relativity and Gravitation. – 2014. – Vol. 46. – P. 1818-1-1818-47.

77 Amir M., Ghosh S.G. Shapes of rotating nonsingular black hole shadows // Physical Review D. – 2016. – Vol. 94. – P. 024054.

78 Li Z., Bambi C. Measuring the Kerr spin parameter of regular black holes from their shadow // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2014. – Vol. 2014. – P. 041-1-041-19.

79 Abdujabbarov A., Amir M., Ahmedov B. et al. Shadow of rotating regular black holes // Physical Review D. – 2016. – Vol. 93. – P. 104004.

80 Takahashi R. Black Hole Shadow of Charged Spinning Black Holes // Publicatins of the Astronomical Society of Japan. – 2005. – Vol. 57, Issue 2. – P. 273-277.

81 Yumoto A., Nitta D., Chiba T. et al. Shadows of multi-black holes: Analytic exploration // Physical Review D. – 2012. – Vol. 86. – P. 103001.

82 Amarilla L., Eiroa E.F., Giribet G. Null geodesics and shadow of a rotating black hole in extended Chern-Simons modified gravity // Physical Review D. – 2010. – Vol. 81. – P. 124045.

83 Amerilla L., Eiroa E.F. Shadow of a rotating braneworld black hole // Physical Review D. – 2012. – Vol. 85. – P. 064019.

84 Övgün A., Sakalli I. Testing generalized Einstein-Cartan-Kibble-Sciama gravity using weak deflection angle and shadow cast // Classical and Quantum Gravity. – 2020. – Vol. 37, Issue 22. – P. 225003.

85 Jusufi K., Amir M., Ali M.S. et al. Quasinormal modes, shadow, and graybody factors of 5D electrically charged Bardeen black holes // Physical Review D. – 2020. – Vol. 102. – P. 064020.

86 Eiroa E.F., Sendra C.M. Shadow cast by rotating braneworld black holes with a cosmological constant // The European Physical Journal C. – 2018. – Vol. 78 Issue 2. – P. 91-1-91-12.

87 Horowitz G.T., Wiseman T. General black holes in Kaluza-Klein theory // https://arxiv.org/abs/1107.5563. 10.02.2025.

88 Reall H.S. Higher dimensional black holes and supersymmetry // Physical Review D. – 2003. – Vol. 68. – P. 024024.

89 Hashimoto K., Kinoshita S., Murata K. Einstein Rings in Holography // Physical Review Letters. – 2019. – Vol. 123. – P. 031602.

90 Papnoi U., Atamuratov R., Ghosh S.G. et al. Shadow of five-dimensional rotating Myers-Perry black hole // Physical Review D. – 2014. – Vol. 90. – P. 024073.

91 Ahmed F., Singh D.V., Ghosh S.G. 5D rotating regular Myers-Perry black holes and their shadow // https://arxiv.org/abs/2008.10241. 10.02.2025.

92 Amir M., Singh B.P., Ghosh S.G. Shadows of rotating five-dimensional charged EMCS black holes // The European Physical Journal C. – 2018. – Vol. 78. - P. 399-1-399-15.

93 Decanini Y., Folacci A., Raffaelli B. Fine structure of high-energy absorption cross sections for black hole // Classical and Quantum Gravity. – 2011. – Vol. 28, Issue 17. – P. 175021.

94 Guha S., Bhattacharya P., Chakraborty S. Particle motion in the field of a five-dimensional charged black hole // Astrophysics and Space Science. – 2012. – Vol. 341. – P. 445-455.

95 Carroll S. Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity. – Boston, 2004. – 525 p.

96 Mandal S., Upadhyay S., Yergaliyeva G., MyrzakulovY. Shadow of the 5D Reissner-Nordstrom AdS black hole // International Journal of Modern Physics– 2023. – Vol. 8. – P2350047

97 Rain D., Thomas E. Black Holes: An Introduction. – Ed. 2nd. – London, 2005. – 155 p.

98 Saha A., Modumudi S.M., Gangopadhyay S. Shadow of a noncommutative geometry inspired Ayȯn Beato Garcîa black hole // General Relativity and Gravitation. – 2018. – Vol. 50. – P. 103.

99 Synge J.L. Relativity: The General Theory. – Amsterdam, 1960. – 519 p.

100 Rogers A. Frequency-dependent effects of gravitational lensing within plasma // Monthly Notices of the Roal Astronomical Society. – 2015. – Vol. 451. – P. 17-25.

101 Wei S.W., Liu Y.X. Observing the shadow of Einshtein-Maxwell-Dilaton-Axion black hole // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2013. – Vol. 2013, Issue 11. – P. 063-1-063-17.

102 Mashhoon B. Scattering of Electromagnetic Radiation from a Black Hole // Physical Review D. – 1973. – Vol. 7. – P. 2807-2814.

103 Page D.N. Particle emission rates from a black hole: Massless particles from an uncharged, nonrotating hole // Physical Review D. – 1976. – Vol. 13. – P. 198-206.

104 Övgün A., Sakalli I., Saavedra J. et al. Shadow cast of noncommutative black holes in Rastall gravity // Modern Physics Letters A. – 2020. – Vol. 35, Issue 20. – P. 2050163.

105 Upadhyay S. et al. A modified thermodynamics of rotating and charged BTZ black hole // Journal of Holography Applications in Physics. – 2022. – Vol. 2. – P. 25-48.

106 Das A., Saha A., Gangopadhyay S. Shadow of charged black holes in Gauss-Bonnet gravity // The European Physics Journal C. – 2020. – Vol. 80. – P. 180-1-180-15.

107 Belhaj A., Belmahi H., Benali M., Hadri W. El., Moumni El., Torrente-Laujan. Shadow of 5D black holes from string theory // Physics Letters B. – 2021. – Vol. 812. – P. 136025.

108 David Lovelock. The Einstein Tensor and Its Generalizations // Journal of Mathematical Physics. – 1971. – Vol. 12. – P. 498-501.

109 Lovelock D. The Four-Dimensionality of Space and the Einstein Tensor // Journal of Mathematical Physics. – 1972. – Vol. 13. – P. 874-876.

110 Daruelle N., Farina-Busto L. The lovelock gravitational field equations in cosmology // Physical Review D. – 1990. – Vol. 41. – P. 3696-3708.

111 Nojiri S., Odintsov S.D., Oikonomou V.K. Modified gravity theories on a nutshell: inflation, bounce and late-time evolution. – 2017. – Vol. 692. – P. 1-104.

112 Lanczos C. One Application of the Quantized Electromagnetic Field outside the High-Dimensional Static Gauss-Bonnet Black Holes // Annals of Mathematics. – 1938. – Vol. 39. – P. 842.

113 Zweibach B. Curvature squared terms and string theories // Physics Letters B. – 1985. – Vol. 156, Issue 5-6. – P. 315-317.

114 Upadhyay S., Singh D.V. Black hole solution and thermal properties in 4D AdS Gauss-Bonnet massive gravity // The European Physical Journal Plus. – 2022. – Vol. 137, Issue 3. – P. 383-1-383-20.

115 Singh D.V., Singh B.K., Upadhyay S. $D AdS Einstein-Gauss-Bonnet black hole with Yang-Mills field and its thermodynamics // Annals of Physics. – 2021. – Vol. 434. – P. 168642.

116 Sakharov A.D. The Initial Stage of an Expanding Universe and the Appearance of a Nonuniform Distribution of Matter // Soviet Physics Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1966. – Vol. 22. – P. 241-249.

117 Gliner E.B. Algebraic Properties of the Energy-momentum Tensor and Vacuum-like States o+ Matter // Soviet Physics - Journal of Eperimental and Theretical Physics. 1966. – Vol. 22. – P. 378-382.

118 Bardeen J. Non-singular general-relativistic gravitational collapse // Proceed. of the 5th internat. conf. on Gravitation and the Theory of Relativity. – Tbilisi, 1968. – P. 174.

119 Ayon-Beato E., Garcia A. Non-Singular Charged Black Hole |Solution for Non-Linear Source // General Relativity and Gravit. 1999. – Vol. 31. – P. 629-633.

120 Ayon-Beato E., Garcia A. Four-parametric regular black hole solution // General Relativity and Gravitation. – 2005. – Vol. 37. – P. 635-641.

121 Ayon-Beato E., Garcia A. The Bardeen model as a nonlinear magnetic monopole // Physics Letters B. – 2000. – Vol. 493, Issue 1-2. – P. 149-152.

122 Ayon-Beato E., Garcia A. Regular Black Hole in General Relativity Coupled to Nonlinear Electrodynamics // Physical Review Letters. – 1998. – Vol. 80. – P. 5056-1-5056-6.

123 Ansoldi S. Spherical black holes with regular center // https://arxiv.org/abs/0802.0330. 10.02.2025.

124 Bronnikov K.A. Regular magnetic black holes and monopoles from nonlinear electrodynamics // Physical Review D. – 2001. – Vol. 63. – P. 044005.

125 Zaslavskii O.B. Acceleration of particles by black holes: Kinetic explanation // Physical Review D. – 2011. – Vol. 84. – P. 024007.

126 Lemos J.P.S., Zanchin V.T. Regular black holes: Electrically charged solutions, Reissner-Nordstrom outside a de Sitter core // Physical Review D. – 2011. – Vol. 83. – P. 124005.

127 Culetu H. On a Regular Charged black Hole with a Nonlinear Electric Source // International J of Theoretical Physics. – 2015. – Vol. 54. – P. 2855-2863.

128 Balart L., Vagenas E.C. Regular black hole metrics and the weak energy condition // Physics Letters B. – 2014. – Vol. 730. – P. 14-17.

129 Balart L., Vagenas E.C. Regular black holes with a nonlinear electrodynamics source // Physical Review D. – 2014. – Vol. 90. – P. 124045.

130 Xiang L., Ling Y., Shen Y.G. Singularities and the finale of black hole evaporation // International Journal of Modern Physics D. – 2013. – Vol. 22, Issue 12. – P. 1342016.

131 Singh D.V., Singh N.K. Anti-evaporation of Bardeen de-Sitter black holes // Annals of Physics. – 2017. – Vol. 383. – P. 600-609.

132 Singh D.V., Ali M.S., Singh N.K. Noncommutative geometry inspired rotating black string // International Journal of Modern Physics D. – 2018. – Vol. 27, Issue 12. – P. 1850108.

133 Fernando S. Bardeen-de Sitter black hole // International Journal of Modern Physics D. – 2017. – Vol. 26, Issue 7. – P. 175071.

134 Singh D.V., Ghosh S.G., Maharaj S.D. Exact nonsingular black holes and thermodynamics // Nuclear Physics B. – 2022. – Vol. 981. – P. 115854.

135 Singh D.V., Bhardwaj V.K., Upadhyay S. Thermodynamic properties, thermal image and phase transition of Einstein-Gauss-Bonnet black hole coupled with nonlinear electrodynamics // The European Physical Journal Plus. – 2022. – Vol. 137, Issue 8. – P. 969-1-969-20.

136 Singh D.V., Shukla A., Upadhyay S. Quasinormal modes, shadow and thermodynamics of black holes coupled with nonlinear electrodynamics and cloud of strings // Annals of Physics. 2022. – Vol. 447. – P. 169157.

137 Hendi S.H., Panahiyan S., Eslam Panah B. Extended phase space of black holes in Lovelock gravity with nonlinear electrodynamics // Progress of Theoretical and Experimental Physics. – 2015. – Vol. 2015, Issue 10. – P. 103E01.

138 Hendi S.H., Sheykhi A. et al. Phase transition and thermodynamic geometry of Einstein-Maxwell-dilaton black holes // Physical Review D. – Vol. 92, Issue 6. – P. 064028.

139 Singh D.V., Kumar R., Ghosh S.G. et al. Phase transition of AdS black holes in 4D EGB gravity coupled to nonlinear electrodynamics // Annals of Physics. – 2021. – Vol. 424. – P. 168347.

140 Singh D.V., Ghosh S.G., Maharaj S.D. Clouds of strings in 4D Einstein-Gauss-Bonnet black holes // Physics of the Dark Universe. – 2020. – Vol. 30. – P. 100730.

141 Singh D.V., Siwach S. Thermodynamics and P-v critical of Bardeen-AdS black hole in 4D Einstein-Gauss-Bonnet gravity // Physics Letters B. – 2020. – Vol. 808. – P. 135658.

142 Kumar A., Singh D.V., Ghosh S.G. Hayward black holes in Einstein-Gauss-Bonnet gravity // Annals of Physics. – 2020. – Vol. 419. – P. 168214.

143 Singh D.V., Ghosh S.G., Maharaj S.D. Bardeen-loke regular black holes in 5D Einstein-Gauss-Bonnet gravity // Annals of Physics. 2020. – Vol. 412. – P. 168025.

144 Kumar A., Singh D.V., Ghosh S.G. D-dimensional Bardeen-AdS black holes in Einstein-Gauss-Bonnet theory // The European Physics Journal C. – 2019. – Vol. 79. – P. 275-1-275-26.

145 Ghosh S.G., Singh D.V., Maharaj S.D. Regular black holes in Einstein-Gauss-Bonnet gravity // Physical Review D. – 2018. – Vol. 97. – P. 104050.

146 Ghosh S.G., Kumar A., Singh D.V. Anti-de Sitter Hayward black holes in Einstein-Gauss-Bonnet gravity // Physics of the Dark Universe. – 2020. – Vol. 30. – P. 100660.

147 Singh D.V., Siwach S. Thermodynamics and P-v criticality of Bardeen-AdS black holes in 4D Einstein-Gauss-Bonnet gravity // Physics Letters B. – 2020. – Vol. 808. – P. 135658.

148 Singh B.K., Singh R.P., Singh D.V. Extended phases space thermodynamics of Bardeen black hole in massive gravity // The European Physics Journal Plus. – 2020. – Vol. 135. – P. 862-1-862-18.

149 Bambi B.K., Modesto L. Rotating regular black holes // Physics Letters B. – 2013. – Vol. 721, Issue 4-5. – P. 329-334.

150 Ghosh S.G. A nonsingular rotating black hole // The European Physics Journal C. – 2015. – Vol. 75. – P. 532-1-532-7.

151 Toshmatov B., Ahmedov B., Abdujabbarov A. et al. Rotating regular black hole solution // Physical Review D. – 2014. – Vol. 89. – P. 104017.

152 Ghosh S.G., Maharaj S.D. Radiating Kerr-like regular black hole // The European Physical Journal C. – 2015. – Vol. 75, Issue 1. – P. 7-1-7-10.

153 Neves J.C.S., Saa A. Regular rotating black holes and the weak energy condition // Physics Letters B. – 734. – P. 44-48.

154 Odintsov S.D., Oikonomou V.K., Fronimos F.P. Rectifying Einstein-Gauss-Bonnet inflation in view of GW170817 // Nuclear Physics B. – 2020. – Vol. 958. – P. 115135.

155 Oikonomou V.K. A refined Einstein-Gauss-Bonnet inflationary theoretical framework // Classical and Quantum Gravity. – 2021. – Vol. 38, N19. – P. 195025.

156 Nashed G.G.L., Odintsov S.D., Oikonomou V.K. Anisotropic Compact Stars in D-4 Limit of Gauss-Bonnet Gravity // Symmetry. – 2022. – Vol. 14, Issue 3. – P. 545-1-545-26.

157 Oikonomou V.K. Primordial gravitational waves predictions for GW170817-compatible Einstein-Gauss-Bonnet theory // Astroparticle Physics. – 2022. – Vol. 141. – P. 102718.

158 Hendi S.H., Panash B.E., Panahiyan S. Einstein-Born-Infeld-massive gravity: adS-black hole solutions and their thermodynamical properties // Journal of High Energy Physics. – 2015. – Vol. 2015, Issue 11. – P. 157-1-157-20.

159 Upadhyay S. Leading-order corrections to charged rotating AdS black holes thermodynamics // General Relativity and Gravitation. – 2018. – Vol. 50. – P. 128.

160 Upadhyay S., Hendi S.H., Panahiyan S. et al. Thermal fluctuations of charged black holes in gravity's rainbow // Progress of Theoretical and Experimental Physics. – 2018. – Vol. 2018, Issue 9. – P. 093E01.

161 Pourhassan B., Upadhyay S., Saatdat H. et al. Quantum gravity effect on Harava-Lifshitz black hole // Nuclear Physics B. – 2018. – Vol. 928. – P. 415-434.

162 Upadhyay S. Quantum corrections to thermodynamics of quasitopological black holes // Physics Letters B. – 2017. – Vol. 775. – P. 130-139.

163 Kubiznak D., Mann R.B., Teo M. Black hole chemistry: thermodynamics with Lambda // Classical and Quantum Gravity. – 2017. – Vol. 34, Issue 6. – P. 063001.

164 Hawking S., Page D. Thermodynamics of black holes in anti-de Sitter space // Communication in Mathematical Physics. 1983. – Vol. 87. – P. 577-588.

165 Witten E. Anti- de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories // Advances in Theoretical and Mathematical Physics. – 1998. – Vol. 2. – P. 505-532.

166 Chamblin A., Emparan R., Johnson C.V. et al. Holography, thermodynamics, and fluctuations of charged AdS black holes // Physical Review D. – 1999. – Vol. 60. – P. 104026.

167 Chamblin A., Emparan R., Johnson C.V. et al. Charged AdS black holes and catastrophic holography // Physical Review D. – 1999. – Vol. 60. – P. 064018,

168 Hansen D., Kubiznak D., Mann R.B. Universality of P-V criticality in horizon thermodynamics // Journal of High Energy Physics. – 2017. – Vol. 01. – P. 47-1-47-24.

169 Hendi S.H., Momennia M. AdS charged black holes in Einstein-Yang-Mills gravity's rainbow: Thermal stability and P-V criticality // Physics Letters B. – 2018. – Vol. 777. – P. 222-234.

170 Hendi S.H., Panahiyan S., Panah Eslam B. P-V criticality and geometrical thermodynamics of black holes with Born-Infeld type nonlinear electrodynamics // International Journal of Modern Physics D. – 2016. – Vol. 25, Issue 1. – P. 1650010.

171 Hennigar R.A., Tjoa E., Mann R.B. Thermodynamics of hairy black holes in Lovelock gravity // J of High Energy Phys. – 2017. – Vol. 02. – P. 070-1-070-64.

172 Singh R.P., Singh B.K., Gupta B.R..K., Sachan S. Thermodynamics properties of Bardeen black holes in dRGT massive gravity // Canadian Journal of Physics. – 2022. – Vol. 100. – P. 39-47.

173 Ali M.S., Ghosh S.G., Wang A. Thermodynamics of Kerr-Sen-AdS black holes in the restricted phase space // Physical Review D. – 2023. – Vol. 108. – P. 044045.

174 Kumar A., Sood A., Singh J.K. et al. Phase structure and critical behavior of charged-AdS black holes with perfect fluid dark matter // Physics of the Dark Universe. – 2023. – Vol. 40. – P. 101220.

175 Sood A., Kumar A., Singh J.K. et al. Thermodynamics stability and P-V criticality of nonsingular-AdS black holes andowed with clouds of strings // The European Physical Journal C. – 2022. – Vol. 82, Issue 3. – P. 227-1-227-11.

176 Abdusattar H. Thermodynamic geometry and universal properties off charged anti-de Sitter black hole immersed in perfect fluid dark matter // Physics of the Dark Universe. – 2023. – Vol. 40. – P. 101228.

177 Abdusattar H. Thermodynamics of deformed AdS-Schwarzchild black hole // The European Physical Journal C. – 2023. – Vol. 83, Issue 7. – P. 1045.

178 Abdusattar H. Insight into the Microstructure of FRW Universe from a P-V Phase Transition // J of High Energy Phys. – 2023. – Vol. 09. – P. 147-1-147-19.

179 Kumar A., Singh D.V, Myrzakulov Y., Yergaliyeva G., Upadhyay S. Exact solution of Bardeen black hole in Einstein-Gauss-Bonnet gravity // European physical journal plus– 2023. – Vol. 8. – P. 138:1071.

180 Abdusattar H., Kong S.B., Zhang H., Hu Y.P. Phase transitions and critical phenomena for the FRW universe in an effective scalar-tensor theory // Physics of the Dark Universe. – 2023. – Vol. 42. – P. 101330.

181 Singh D.V., Upadhyay S., Ali M.S. Rotating Lee-Wick black hole and thermodynamics // International Journal of Modern Physics A. – 2022. – Vol. 37, Issue 9. – P. 2250049.

182 Salazar G., Garcia A., Plebanski J. Duality rotations and type D solutions to Einstein equations with nonlinear electromagnetic sources // Journal of Mathematical Physics. – 1987. – Vol. 28. – P. 2171-2181.

183 Ghosh S.G., Singh D.V., Kumar R. et al. Phase transition of AdS black holes in 4D EGB gravity coupled to nonlinear electrodynamics // Annals of Physics. – 2021. – Vol. 424. – P. 168347.

184 Boulware D.G., Deser S. String-Generated Gravity Models // Physical Review Letters. – 1985. – Vol. 55. – P. 2656.

185 Born M., Infeld L. Foundations of the new field theory // Proceedings of the Royal Society A. – 1934. – Vol. 144, Issue 852. – P. 425-451.

186 Kumar A., Ghosh S.G. Nonsingular black hole chemistry in 4D Einstein-Gauss-Bonnet gravity // Nuclear Physics B. – 2023. – Vol. 987. – P. 116089.

187 Ali M.S., Ghosh S.G. Exact d-dimensional Bardeen-de Sitter black holes and thermodynamics // Physical Review D. – 2018. – Vol. 98. – P. 084025.

188 Ma M., Zhao R. Corrected form of the first law of thermodynamics for regular black holes // Classical and Quantum Gravity. – 2014. – Vol. 31. – P. 245014.

189 Maluf R.V., Neves J.C.S. Thermodynamics of a class of regular black holes with a generalized uncertainty principle // Physics Review D. – 2018. – Vol. 97. – P. 104015.

190 Wald R.M. Black hole entropy is the Noether charge // Physics Review D. – 1993. – Vol. 48. – P. R3427.

191 Ryu S., Takayanagi T. Holographic Derivation of Entanglement Entropy from the anti-de Sitter Space/Conformal Field Theory Correspondence // Physical Review Letters. – 2006. – Vol. 96. – P. 181602.

192 Li H.-L., Yang S.-Z. Zu X.-T. Holographic research on phase transitions for a five dimensional AdS black hole with conformally coupled scalar hair // Physics Letters B. – 2017. – Vol. 764. – P. 310-317.

193 Upadhyay S. Bouncing Universe for deformed non-minimally coupled inflation model // Journal of Holography Applications in Physics. – 2023. – Vol. 3. – P. 57-70.

194 Gliner E.B. Algebraic Properties of the Energy-momentum Tensor and Vacuum-like States of Matter // Soviet Physics Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1966. – Vol. 22. – P. 378-382.

195 Ayon-Beato E., Garcia A. Non-Singular Charged Black Hole Solution for Non-Linear Source // General Relativity and Gravit. – 1999. – Vol. 31. – P. 629-633.

196 Zaslavskii O.B. Regular black holes with flux tube core // Physical Review D. – 2009. – Vol. 80, Issue 6. – P. 064034.

197 Fernando S. Bardeen–de Sitter black holes // International Journal of Modern Physics D. – 2017. – Vol. 26, Issue 07. – P. 1750071.

198 Paul P., Upadhyay S., Myrzakulov Y. et al. More exact thermodynamics of nonlinear charged AdS black holes in 4D critical gravity // Nuclear Physics B. – 2023. – Vol. 993. – P. 116259.

199 Kumar A., Singh D.V., Ghosh S.G. Hayward black holes in Einstein–Gauss–Bonnet gravity // Annals of Physics. – 2020. – Vol. 419. – P. 168214.

200 Pourhassan B., Dehghani M., Upadhyay S. et al. Exponential corrected thermodynamics of Born-Infeld BTZ black holes in massive gravity // Modern Physics Letters A. – 2022. – Vol. 37, Issue 33-34. – P. 2250230.

201 Hendi S.H., Riazi N., Panahiyan S., Eslam Panah B. Higher dimensional dyonic black holes // https://arxiv.org/abs/1710.01818. 10.02.2025.

202 Myrzakulov Y., Myrzakulov K., Upadhyay S. et al. Quasinormal modes and phase structure of regular AdS Einstein-Gauss-Bonnet black holes // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. – 2023. – Vol. 20, Issue 07. – P. 2350121.

203 Myrzakulov Y., Yergaliyeva G. Thermodynamic structure of Bardeen-Yang-Mills black holes // Reports of the national academy of sciences of the republic of Kazakhstan. – 2023. – Vol. 3, P.36-46